Correction : position relative de deux courbes

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -3x^2 + x + 5$ et $g(x) = x^2 - x - 1$.

$f(x) - g(x) = -3x^2 + x + 5 - (x^2 - x - 1) = -3x^2 + x + 5 - x^2 + x + 1 = -4x^2 + 2x + 6 = 2(-2x^2 + x + 3)$.

Trinôme $-2x^2 + x + 3$: $a = -2$; $b = 1$; $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 3 + 1 + 24 = 25$. $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$.

Le trinôme $-2x^2 + x + 3$ possède deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2 \times (-2)} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2 \times (-2)} = \dfrac{4}{-4} = -1$.

Comme $2 > 0$, le signe de $f(x) - g(x)$ est le signe du trinôme $-2x^2 + x + 3$.

Comme $a = -2$, $a < 0$ d'où le tableau de signes :

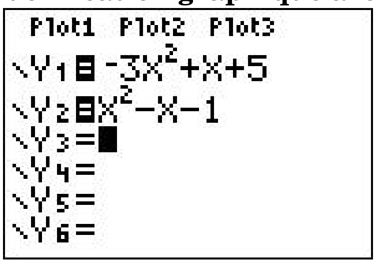
x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$(a = -2)$

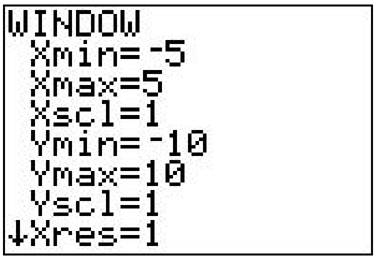
• $f(x) - g(x) > 0 \iff x \in \left]-1 ; \dfrac{3}{2}\right[$ donc $\mathscr{P}_1$ est strictement au-dessus de $\mathscr{P}_2$ sur $\left]-1 ; \dfrac{3}{2}\right[$.

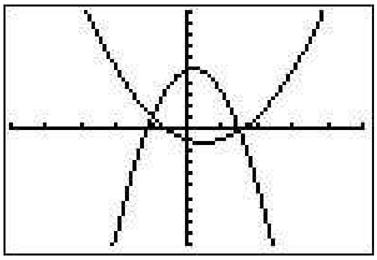
• $f(x) - g(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = \dfrac{3}{2}$ donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupent aux points d'abscisses -1 et $\dfrac{3}{2}$.

• $f(x) - g(x) < 0 \iff x \in]-\infty ; -1[\cup \left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$ donc $\mathscr{P}_1$ est strictement en-dessous de $\mathscr{P}_2$ sur $]-\infty ; -1[$ et sur $\left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$.

Vérification graphique à la calculatrice TI :







✎ Exercice 2

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ et $g(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.

La fonction f est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$ et la fonction g sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, on va donc travailler sur l'ensemble $\mathscr{D} = \mathbf{R} \setminus \{-2\ ;\ 1\}$.

$$f(x)-g(x) = \frac{x}{x+2} - \frac{x+3}{x-1} = \frac{x(x-1)-(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2-x-(x^2+2x+3x+6)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2-x-(x^2+5x+6)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2-x-x^2-5x-6}{(x+2)(x-1)}$$

$f(x)-g(x) = \dfrac{-6x-6}{(x+2)(x-1)}$.

* $-6x-6=0 \iff -6x=6 \iff x=\dfrac{6}{-6} \iff x=-1$.

* $x+2=0 \iff x=-2$;

* $x-1=0 \iff x=1$.

On peut dresser le tableau de signes de $f(x)-g(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$-6x-6$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	$(m=-6)$
$x+2$		$-$	||	$+$	|	$+$	||	$+$	$(m=1)$
$x-1$		$-$	||	$-$	|	$-$	||	$+$	$(m=1)$
$f(x)-g(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

- $f(x)-g(x)>0 \iff x \in]-\infty\ ;\ -2[\cup]-1\ ;\ 1[$ donc $\mathscr{H}_1$ est strictement au-dessus de $\mathscr{H}_2$ sur $]-\infty\ ;\ -2[$ et sur $]-1\ ;\ 1[$.
- $f(x)-g(x)=0 \iff x=-1$ donc $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ se coupent au point d'abscisse -1.
- $f(x)-g(x)<0 \iff x \in]-2\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ donc $\mathscr{H}_1$ est strictement en-dessous de $\mathscr{H}_2$ sur $]-2\ ;\ -1[$ et sur $]1\ ;\ +\infty[$.

Vérification graphique à la calculatrice TI :