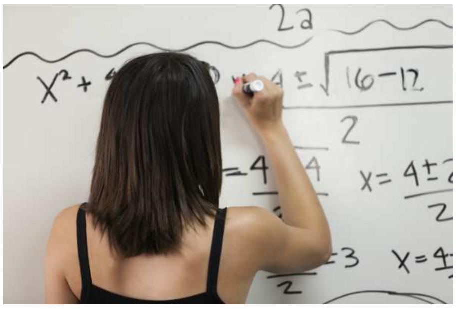
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

ORAL DE RATTRAPAGE

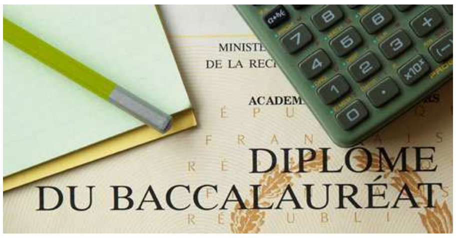
13 sujets corrigés pour préparer efficacement l'oral de maths



Réussir son oral de rattrapage de mathématiques

Corinne Huet

https ://www.bossetesmaths.com



Avant de commencer :

Ce livret PDF comporte 13 sujets de préparation à l'**oral de rattrapage du bac spécialité mathématiques**.
Ces sujets sont numérotés par des lettres alphabétiques (du sujet A au sujet M) et chacun de ces 13 sujets sont entièrement corrigés.
Chaque sujet comporte 2 exercices (sauf le sujet B qui n'en comporte qu'un) et doit être traité en 20 minutes.
Certains sujets peuvent paraître longs pour 20 minutes de recherche mais cela est destiné à couvrir le maximum de notions et le candidat devra au moins avoir une idée de la méthode pour y répondre sans qu'elle soit totalement détaillée. En effet, le jury sera sensible aux connaissances du candidat sur des sujets un peu étoffés.
L'ensemble du programme est couvert par les exercices proposés. Il faudra revoir le chapitre concerné au besoin.

Attention :

Les exercices proposés dans ce livret PDF sont destinés à préparer le candidat à l'oral.
Il ne s'agit pas d'exercices officiels ; chaque jury proposera ses propres exercices.
Néanmoins ces 13 sujets constituent un excellent entraînement pour se préparer à l'oral.

Bon courage !

Consignes pour le candidat

- L'épreuve orale est constituée d'une préparation de 20 minutes suivie d'un entretien oral de même durée.
- Vous pouvez utiliser votre calculatrice.
- Le brouillon vous est normalement fourni.
- Les exercices constituent une base d'argumentation pour l'entretien : ils doivent être tous abordés, si possible.
- Vous préparerez des réponses que vous devrez être capable de justifier (il est inutile de les rédiger complètement par écrit).
- Des questions complémentaires pourront vous être posées au cours du dialogue.

Sujet A

Exercice n° 1

On se place dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace.

Soit d et d' les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -2-k \\ y = 3+k \\ z = 1+3k \end{cases} \quad \text{(avec } k \in \mathbf{R}\text{) et} \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2t \\ z = -4t \end{cases} \quad \text{(avec } t \in \mathbf{R}\text{).}$$

Les droites d et d' sont-elles parallèles, sécantes ou non coplanaires ? Justifier.

Exercice n° 2

Résoudre l'inéquation : $\ln(3-x) \leqslant 1$.

Correction Sujet A

Exercice n° 1

$d\begin{cases} x = -2-k \\ y = 3+k \\ z = 1+3k \end{cases}$ (avec $k \in \mathbf{R}$) et $d'\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2t \\ z = -4t \end{cases}$ (avec $t \in \mathbf{R}$).

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'.

On a : $-1 \times (-2) = 2$; $1 \times (-2) = -2$; mais $3 \times (-2) = -6 \neq -4$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\boxed{\text{les droites } d \text{ et } d' \text{ ne sont pas parallèles}}$.

Cherchons si ces deux droites ont un point commun (auquel cas elles seront sécantes).

On cherche donc deux réels k et t tels que :

$$\begin{cases} -2-k = 1+2t \\ 3+k = -2t \\ 1+3k = -4t \end{cases} \iff \begin{cases} -2-1 = k+2t \\ k+2t = -3 \\ 3k+4t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} k+2t = -3 \\ 3k+4t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} k = -3-2t \\ 3(-3-2t)+4t = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = -3-2t \\ -9-6t+4t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} k = -3-2t \\ -6t+4t = -1+9 \end{cases} \iff \begin{cases} k = -3-2t \\ -2t = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} k = -3-2t \\ t = \dfrac{8}{-2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = -3-2\times(-4) \\ t = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} k = -3+8 \\ t = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} k = 5 \\ t = -4 \end{cases}.$$

On remplace ensuite dans les équations paramétriques de d ou de d' et on obtient :

$\begin{cases} x = -2-5 \\ y = 3+5 \\ z = 1+3\times 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -7 \\ y = 8 \\ z = 16 \end{cases}$. Ainsi $\boxed{\text{les droites } d \text{ et } d' \text{ sont sécantes au point } \mathrm{A}(-7\ ;\ 8\ ;\ 16)}$.

Exercice n° 2

$\boxed{\text{Inéquation : } \ln(3-x) \leqslant 1}$.

- Cette inéquation est bien définie si : $3-x > 0 \iff 3 > x \iff \boxed{x < 3}$.
- $\ln(3-x) \leqslant 1$

$\iff 3-x \leqslant \mathrm{e}^1$

$\iff 3-x \leqslant \mathrm{e}$

$\iff 3-\mathrm{e} \leqslant x$

$\iff \boxed{x \geqslant 3-\mathrm{e}}$.

- On a donc : $x < 3$ et $x \geqslant 3-\mathrm{e}$

donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\boxed{\mathscr{S} = [3-\mathrm{e}\ ;\ 3[}$.

Sujet B

Exercice

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1) L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par f est égale à :

a) $\ln 2$ **b)** $-2\ln 2$

c) $2\ln 2$ **d)** $\dfrac{1}{2}\ln 2$

2) f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x, on a :

a) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ **b)** $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

c) $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ **d)** $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$

3) L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

a) $y = 2x$ **b)** $y = x - 1$

c) $y = x$ **d)** $y = 2x - 1$

4) La fonction f est :

a) concave sur $[0\ ;\ 1]$ **b)** concave sur $[0\ ;\ +\infty[$

c) convexe sur $[0;+\infty[$ **d)** convexe sur $[0;1]$

5) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à :

a) $\mathrm{e} - 5$ **b)** 5

c) $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$ **d)** 1

Correction Sujet B

Exercice

1) $f(\ln 2)=\ln 2\times \mathrm{e}^{-\ln 2}$. Or $-\ln 2=\ln\frac{1}{2}$ et $\mathrm{e}^{-\ln 2}=\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{f(\ln 2)}=\ln 2\times\dfrac{1}{2}=\boxed{\dfrac{1}{2}\ln 2}$. $\boxed{\text{Réponse } \mathbf{d)}}$

2) $f=uv$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$. Alors : $u'(x)=1$ et $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi $f'=u'v+uv'$ donc, pour tout réel x, $\boxed{f'(x)}=1\mathrm{e}^{-x}+x\times(-\mathrm{e}^{-x})=\boxed{(1-x)\mathrm{e}^{-x}}$.

$\boxed{\text{Réponse } \mathbf{c)}}$

3) On sait que l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0 est :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=f'(0)x+f(0)$.

Or $f(0)=0\mathrm{e}^0=0$ et $f'(0)=(1-0)\mathrm{e}^0=1$. Donc $T: y=1x+0$ soit $\boxed{y=x}$. $\boxed{\text{Réponse } \mathbf{c)}}$

4) On sait que $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

$f'=uv$ avec $u(x)=1-x$ et $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$. Alors : $u'(x)=-1$ et $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi : $f''=u'v+uv'$ donc, pour tout réel x, $f''(x)=-1\mathrm{e}^{-x}+(1-x)\times(-\mathrm{e}^{-x})=(-1-1+x)\mathrm{e}^{-x}$

soit $f''(x)=(x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

f' est strictement décroissante sur $]-\infty\,;2]$ et strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

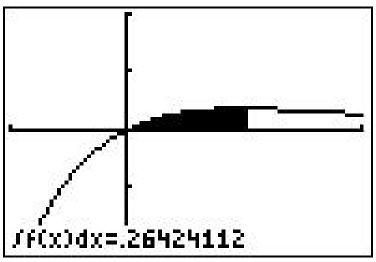
Donc f est concave sur $]-\infty\,;2]$ et convexe sur $[2\,;\,+\infty[$.

En particulier, $\boxed{f \text{ est concave sur } [0\,;\,1]}$. $\boxed{\text{Réponse } \mathbf{a)}}$

5) Comme f est continue et positive sur $[0\,;\,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

On peut éliminer la réponse **a)** car $\mathrm{e}-5\approx 2{,}718-5\approx -2{,}282$ donc $\mathrm{e}-5<0$.

De plus, en traçant la courbe de f à la calculatrice, on peut constater que l'aire recherchée est strictement inférieure à 1 unité d'aire . On peut donc éliminer les réponses **b)** et **d)**.



Enfin, en calculant cette intégrale à la calculatrice, on obtient environ $0{,}26424112$. Or $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}\approx 0{,}26424112$.

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}}$. $\boxed{\text{Réponse } \mathbf{c)}}$

Sujet C

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire d'éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.

2) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Exercice n° 2

Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives : $5x+7y-z+2=0$ et $-4x+3y+z-7=0$.

1) Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

On note (d) leur droite d'intersection.

2) Montrer que le point $A(5\,;0\,;\,27)$ appartient à (d).

Correction Sujet C

Exercice nº 1

$\boxed{f \text{ définie sur } \mathbf{R} \text{ par } f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}}$.

1) <u>En $-\infty$</u> :

$\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$.

Par produit des limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

<u>En $+\infty$</u> :

$f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, en inversant, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$;

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, en inversant, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

Par somme des limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

On en déduit que $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 0 \text{ est une asymptote horizontale à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty}$.

2) $f = uv$ avec $u(x) = 1+x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

$f' = u'v + uv'$ donc, pour tout réel x, $\boxed{f'(x)} = 1\mathrm{e}^{-x} + (1+x)\times(-\mathrm{e}^{-x}) = (\cancel{1} - \cancel{1} - x)\mathrm{e}^{-x} = \boxed{-x\mathrm{e}^{-x}}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(0) = (1+0)\mathrm{e}^0 = 1$.

3) La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$f(1) = (1+1)\mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

$f'(1) = -1\mathrm{e}^{-1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Donc $T : y = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-1) + \dfrac{2}{\mathrm{e}} \iff y = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}x + \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{2}{\mathrm{e}} \iff \boxed{y = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}x + \dfrac{3}{\mathrm{e}}}$.

Exercice nº 2

$\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2 \text{ les plans d'équations respectives : } 5x+7y-z+2=0 \text{ et } -4x+3y+z-7=0}$.

1) $\mathscr{P}_1 : 5x+7y-z+2 = 0$ donc $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$.

$\mathscr{P}_2 : -4x+3y+z-7 = 0$ donc $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$.

$\overrightarrow{n_1} \,.\, \overrightarrow{n_2} = 5 \times (-4) + 7 \times 3 - 1 \times 1 = -20 + 21 - 1 = 0$

donc $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ et $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2 \text{ sont perpendiculaires}}$.

2) $\boxed{A(5\,;0\,;\,27)}$.

Montrons que $A \in \mathscr{P}_1$: $5x_A + 7y_A - z_A + 2 = 5 \times 5 + 7 \times 0 - 27 + 2 = 25 - 27 + 2 = 0$ donc $\boxed{A \in \mathscr{P}_1}$.

Montrons que $A \in \mathscr{P}_2$: $-4x_A + 3y_A + z_A - 7 = -4 \times 5 + 3 \times 0 + 27 - 7 = -20 + 27 - 7 = 0$ donc $\boxed{A \in \mathscr{P}_2}$.

Donc $A \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$. Or $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = (d)$ donc $\boxed{A \in (d)}$.

Sujet D

Exercice n° 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ pour tout entier naturel n.

3) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

4) Déterminer le plus petit entier $n$tel que $u_n \leqslant 5{,}0001$.

Exercice n° 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal.

On considère les points : A$(1\ ;\ 2\ ;\ -3)$, B$(-3\ ;\ 1\ ;\ 4)$ et C$(2\ ;\ 6\ ;\ -1)$.

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + z + 3 = 0$.

3) Soit H le point de coordonnées $(-5\ ;\ 9\ ;\ 4)$.
Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par H et perpendiculaire au plan (ABC).

Correction Sujet D

Exercice n° 1

$\boxed{(u_n) \text{ définie par } u_0 = 8 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3}.$

1) * $\boxed{u_1} = \frac{2}{5}u_0 + 3 = \frac{2}{5} \times 8 + 3 = \frac{16}{5} + \frac{15}{5} = \boxed{\frac{31}{5}}.$

* $\boxed{u_2} = \frac{2}{5}u_1 + 3 = \frac{2}{5} \times \frac{31}{5} + 3 = \frac{62}{25} + \frac{75}{25} = \boxed{\frac{137}{25}}.$

2) Pour tout entier naturel n, notons P_n la propriété : $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$.

Initialisation : Pour $n = 0$:

$u_0 = 8$ et $3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 + 5 = 3 \times 1 + 5 = 8$ donc $u_0 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 + 5$ et P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que (P_n) est vraie. Montrons qu'alors (P_{n+1}) est vraie.

$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 = \frac{2}{5} \times \left(3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5\right) + 3 = 3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{\cancel{5}} \times \cancel{5} + 3 = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 2 + 3 = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 5$

et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5}.$

3) Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$.

En multipliant par 3 : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\left(\frac{2}{5}\right)^n = 3 \times 0 = 0$.

En ajoutant 5 : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5 = 0 + 5 = 5$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5}$ et $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est donc convergente vers } 5}.$

4) $u_n \leqslant 5{,}0001 \iff 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5 \leqslant 5{,}0001 \iff 3\left(\frac{2}{5}\right)^n \leqslant 5{,}0001 - 5 \iff 3\left(\frac{2}{5}\right)^n \leqslant 0{,}0001$

$\iff \left(\frac{2}{5}\right)^n \leqslant \frac{0{,}0001}{3} \iff \ln\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] \leqslant \ln\frac{0{,}0001}{3} \iff n\ln\frac{2}{5} \leqslant \ln\frac{0{,}0001}{3} \iff n \geqslant \frac{\ln\frac{0{,}0001}{3}}{\ln\frac{2}{5}}.$

(L'inégalité change de sens car $\ln\frac{2}{5} < 0$ et on divise donc par un nombre négatif).

Or $\frac{\ln\frac{0{,}0001}{3}}{\ln\frac{2}{5}} \approx 11{,}25$ donc $n \geqslant 12$.

Le plus petit entier $n$tel que $u_n \leqslant 5{,}0001$est $\boxed{n = 12}$.

Exercice n° 2

$\boxed{\mathrm{A}(1\ ;\ 2\ ;\ -3),\ \mathrm{B}(-3\ ;\ 1\ ;\ 4) \text{ et } \mathrm{C}(2\ ;\ 6\ ;\ -1)}.$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-1 \\ 1-2 \\ 4-(-3) \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-2 \\ -1-(-3) \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés et déterminent donc un plan}}$.

2) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + z + 3 = 0$.

* $2x_A - y_A + z_A + 3 = 2 \times 1 - 2 - \cancel{3} + \cancel{3} = \cancel{2} - \cancel{2} = 0$ donc $A \in \mathscr{P}$.

* $2x_B - y_B + z_B + 3 = 2 \times (-3) - 1 + 4 - 3 = -6 - 1 + 4 - 3 = 0$ donc $B \in \mathscr{P}$.

* $2x_C - y_C + z_C + 3 = 2 \times 2 - 6 - 1 + 3 = 4 - 6 - 1 + 3 = 0$ donc $C \in \mathscr{P}$.

Ainsi le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont confondus et donc $\boxed{(ABC) : 2x - y + z + 3 = 0}$.

3) $\boxed{\mathrm{H}(-5\ ;\ 9\ ;\ 4)}$.

Comme le plan (ABC) a pour équation $2x - y + z + 3 = 0$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC).

Comme la droite (d) est perpendiculaire au plan (ABC), le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

De plus, la droite (d) passe par le point $\mathrm{H}(-5\ ;\ 9\ ;\ 4)$.

Ainsi $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = -5 + 2t \\ y = 9 - t \text{ avec } t \in \mathbf{R} \\ z = 4 + t \end{array}\right.}$ est un système d'équations paramétriques de la droite (d).

Sujet E

Exercice n° 1

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 14\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,04u_n + 200$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 5\,000$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) En déduire que $u_n = 19\,000 \times 1,04^n - 5\,000$.

d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier.

Exercice n° 2

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 e^x - 1$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$.

2) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

3) Démontrer que a appartient à l'intervalle $]0{,}703\,;\,0{,}704[$.

4) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

Correction Sujet E

Exercice nº 1

$\boxed{u_0 = 14\ 000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,04u_n + 200}$.

1) $\boxed{u_1} = 1,04u_0 + 200 = 1,04 \times 14\ 000 + 200 = 14\ 560 + 200 = \boxed{14\ 760}$.

$\boxed{u_2} = 1,04u_1 + 200 = 1,04 \times 14\ 760 + 200 = 15\ 350,4 + 200 = \boxed{15\ 550,4}$.

2) $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = u_n + 5\ 000}$.

a) Soit un entier naturel n. Alors :

$v_{n+1} = u_{n+1} + 5\ 000 = 1,04u_n + 200 + 5\ 000 = 1,04u_n + 5\ 200 = 1,04(u_n + 5\ 000) = 1,04v_n$.

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est une géométrique de raison } q = 1,04}$

$\boxed{\text{et de premier terme } v_0 = u_0 + 5\ 000 = 14\ 000 + 5\ 000 = 19\ 000}$.

b) Alors, pour tout entier naturel n on a : $\boxed{v_n} = v_0 \times q^n = \boxed{19\ 000 \times 1,04^n}$.

c) $v_n = u_n + 5\ 000 \iff u_n = v_n - 5\ 000$. Ainsi : $\boxed{u_n = 19\ 000 \times 1,04^n - 5\ 000}$.

d) Comme $1,04 > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,04^n = +\infty$.

En multipliant par 19 000 : $\lim\limits_{n\to+\infty} 19\ 000 \times 1,04^n = +\infty$.

En soustrayant 5 000 : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Exercice nº 2

$\boxed{g \text{ définie sur } [0\ ;\ +\infty[\text{ par } g(x) = x^2e^x - 1}$.

1) Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x - 0 = (2x + x^2)e^x = x(2+x)e^x$.

On a pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$: $x \geqslant 0$; $2 + x > 0$ et $e^x > 0$.

Donc $g'(x) \geqslant 0$ et g est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

* $g(0) = 0^2 \times e^0 - 1 = 0 - 1 = -1$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Par produit des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$.

En soustrayant 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2) La fonction g est dérivable donc continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Or $0 \in [-1\ ;\ +\infty[$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire,

$\boxed{\text{il existe un unique réel } a \text{ appartenant à } [0\ ;\ +\infty[\text{ tel que } g(a) = 0}$.

3) Avec la calculatrice, on obtient :

x	$0,703$	$0,704$
$g(x)$	$-0,0018$	$0,0205$

donc $\boxed{a \in]0,703\ ;\ 0,704[}$.

4) g est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $g(a) = 0$, d'où le tableau de signes de g sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Sujet F

Exercice n° 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1) **a)** Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

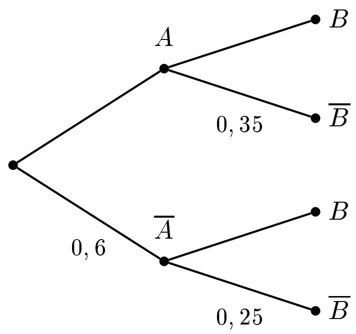
2) **a)** Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.

b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice n° 2

On considère l'arbre pondéré ci-dessous.



Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) $P\left(\overline{B}\right) = 0,6$.

2) $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,45$.

3) $P_B(A) = 0,37$ à $0,01$ près.

CORRECTION SUJET F

Exercice n° 1

$\boxed{f \text{ la fonction définie sur l'intervalle }]0\ ;\ +\infty[\text{ par } f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}}$.

1) a) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et, en ajoutant 1, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln(x)) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$.

Par quotient des limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.

b) Par croissance comparée : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0}$.

Or, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et, en inversant, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Par somme des limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$.

c) * Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$,

$\boxed{\text{la droite d'équation } x = 0 \text{ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe } \mathscr{C}}$.

* Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$,

$\boxed{\text{la droite d'équation } y = 0 \text{ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à } \mathscr{C} \text{ en } +\infty}$.

2) a) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 1+\ln(x)$ et $v(x) = x^2$. On a : $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$.

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc, pour tout $x > 0$, $\boxed{f'(x)} = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1+\ln(x)) \times 2x}{\left(x^2\right)^2} = \dfrac{x - 2x - 2x\ln(x)}{x^4}$

$= \dfrac{-x - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x(-1-2\ln(x))}{x^4} = \boxed{\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}}$.

b) $-1-2\ln(x) > 0 \iff -1 > 2\ln(x) \iff -\dfrac{1}{2} > \ln(x) \iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} > x \iff x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

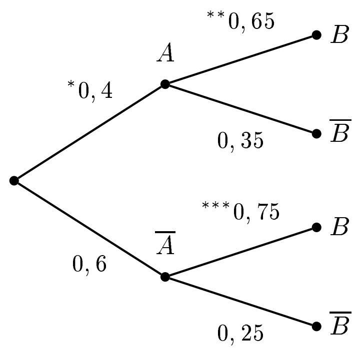
De plus, pour tout $x > 0$, on a $x^3 > 0$.

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$-1-2\ln(x)$	‖	$+$	0	$-$	
x^3	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$	$\searrow$	0

$f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1+\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Exercice n° 2

Complétons l'arbre pondéré :



* $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,6 = 0,4.$

** $P_A(B) = 1 - P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - 0,35 = 0,65.$

*** $P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0,25 = 0,75.$

1) $\boxed{P\left(\overline{B}\right) = 0,6 : \text{FAUX}}$

D'après la formule des probabilités totales :

$\boxed{P\left(\overline{B}\right)} = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

$= P(A) \times P_A\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$

$= 0,4 \times 0,35 + 0,6 \times 0,25$

$= 0,14 + 0,15$

$= \boxed{0,29}.$

2) $\boxed{P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,45 : \text{VRAI}}$

$\boxed{P\left(\overline{A} \cap B\right)} = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = 0,6 \times 0,75 = \boxed{0,45}.$

3) $\boxed{P_B(A) \approx 0,37 \text{ à } 0,01 \text{ près : VRAI}}$

$\boxed{P_B(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{1 - P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{0,4 \times 0,65}{1 - 0,29} = \dfrac{0,26}{0,71} \approx 0,366 \boxed{\approx 0,37 \text{ à } 0,01 \text{ près}}.$

Sujet G

Exercice n° 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, de courbe représentative $\mathscr{C}$.

1) Dresser le tableau de signes de f'' sur $\mathbf{R}$.

2) Quels sont les intervalles sur lesquels f est convexe ? concave ?

3) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice n° 2

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) **Affirmation 1 :** $\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \dfrac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)} = 8$.

2) **Affirmation 2 :** $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 2}\, dx = \ln \frac{5}{3}$.

3) **Affirmation 3 :** L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbf{R}$.

Correction Sujet G

Exercice n° 1

$\boxed{f \text{ définie sur } \mathbf{R} \text{ par } f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1}$.

1) Pour tout réel x, on a : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 3$ et $f''(x) = 6x - 12$.

$f''(x) > 0 \iff 6x - 12 > 0 \iff 6x > 12 \iff x > \dfrac{12}{6} \iff x > 2$.

D'où le tableau de signes de f'' sur $\mathbf{R}$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f ´´(x)		−	0	+	

2) * f'' est négative sur $]-\infty\ ;\ 2]$ donc $\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty\ ;\ 2]}$.

* f'' est positive sur $[2\ ;\ +\infty[$ donc $\boxed{f \text{ est convexe sur } [2\ ;\ +\infty[}$.

3) Comme f'' s'annule en 2 en changeant de signe, la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2.

$f(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 8 - 24 + 6 + 1 = -9$.

Ainsi $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ admet un point d'inflexion au point de coordonnées } (2\ ;\ -9)}$.

Exercice n° 2

1) $\boxed{\textbf{Affirmation 1 vraie}}$.

$\ln\left(\sqrt{e^7}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(e^7\right) = \dfrac{7}{2}$;

$\ln\left(e^9\right) = 9$ et $\ln\left(e^2\right) = 2$ donc $\dfrac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)} = \dfrac{9}{2}$.

Donc $\boxed{\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \dfrac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)}} = \dfrac{7}{2} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{16}{2} = \boxed{8}$.

2) $\boxed{\textbf{Affirmation 2 vraie}}$.

Soit u la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = e^x + 2$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $u'(x) = e^x$.

De plus cette fonction est strictement positive sur $\mathbf{R}$.

Donc l'expression $\dfrac{e^x}{e^x + 2}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui a pour primitive $\ln(u(x))$.

La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 2}$ a pour primitive sur $\mathbf{R}$ la fonction F définie par $F(x) = \ln(e^x + 2)$.

Donc $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 2}\,dx = [F(x)]_0^{\ln 3} = F(\ln 3) - F(0)$.

Or $F(\ln 3) = \ln\left(e^{\ln 3} + 2\right) = \ln(3 + 2) = \ln 5$ et $F(0) = \ln\left(e^0 + 2\right) = \ln(1 + 2) = \ln 3$.

Alors : $\boxed{\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 2}\,dx} = \ln 5 - \ln 3 = \boxed{\ln \frac{5}{3}}$.

3) $\boxed{\textbf{Affirmation 3 fausse}}$.

L'expression $\ln(x-1)-\ln(x+2)$ est bien définie

$\Longleftrightarrow x-1>0$ et $x+2>0$

$\Longleftrightarrow x>1$ et $x>-2$

$\Longleftrightarrow x>1$

$\Longleftrightarrow x\in]1\ ;\ +\infty[$.

On va donc résoudre l'équation $\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4$ dans l'intervalle $I=]1\,;+\infty[$.

$\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4 \Longleftrightarrow \ln\dfrac{x-1}{x+2}=\ln 4 \Longleftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=4 \Longleftrightarrow \dfrac{x-1-4(x+2)}{x+2}=0$

$\Longleftrightarrow \dfrac{x-1-4x-8}{x+2}=0 \Longleftrightarrow \dfrac{-3x-9}{x+2}=0 \Longleftrightarrow -3x-9=0$ et $x\neq -2 \Longleftrightarrow x=-3$ et $x\neq -2$.

Mais $-3\notin I$ donc $\boxed{\text{l'équation } \ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbf{R}}$.

SUJET H

Exercice nº 1

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'entreprise MICRO vend en ligne du matériel informatique notamment des ordinateurs portables et des clés USB.

Durant la période de garantie, les deux problèmes les plus fréquemment relevés par le service après-vente portent sur la batterie et sur le disque dur, ainsi :

- Parmi les ordinateurs vendus, $5\,\%$ ont été retournés pour un défaut de batterie et parmi ceux-ci, $2\,\%$ ont aussi un disque dur défectueux.
- Parmi les ordinateurs dont la batterie fonctionne correctement, $5\,\%$ ont un disque dur défectueux.

On suppose que la société MICRO garde constant le niveau de qualité de ses produits.

Suite à l'achat en ligne d'un ordinateur :

Proposition 1 : La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à $0,08$ à $0,01$ près.

Proposition 2 : La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à $0,0485$.

Proposition 3 : Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à $0,02$.

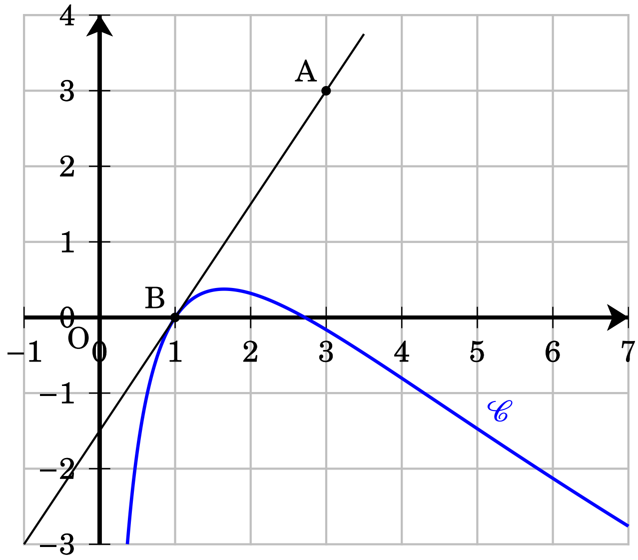
(Voir exercice 2)

Exercice n° 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1.



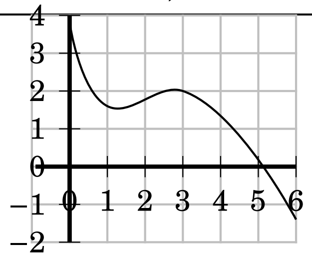
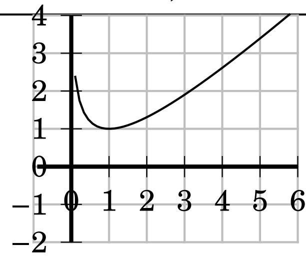
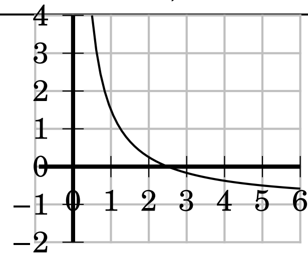
1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

a) $f'(1) = 0$

b) $f'(1) = 1,5$

c) $f'(1) = -\dfrac{2}{3}$

2) Une seule des trois courbes ci-après est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. Préciser laquelle.

a)	**b)**	**c)**
		

CORRECTION SUJET H

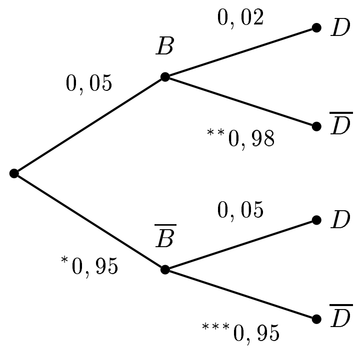
Exercice n° 1

Notons les évènements suivants :

B : "l'ordinateur a un défaut de batterie" ;

D : "l'ordinateur a un disque dur défectueux".

Traduisons les données de l'énoncé par un arbre pondéré :



* $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0,05 = 0,95.$

** $P_B\left(\overline{D}\right) = 1 - P_B(D) = 1 - 0,02 = 0,98.$

*** $P_{\overline{B}}\left(\overline{D}\right) = 1 - P_{\overline{B}}(D) = 1 - 0,05 = 0,95.$

Proposition 1 :

La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est : $\boxed{P\left(\overline{B} \cap \overline{D}\right)} = P\left(\overline{B}\right) \times P_{\overline{B}}\left(\overline{D}\right) = 0,95 \times 0,95 = 0,9025 \boxed{\approx 0,9 \text{ à } 0,01 \text{ près}}$.

Ainsi $\boxed{\text{cette probabilité n'est pas égale à } 0,08 \text{ à } 0,01 \text{ près}}$. $\boxed{\text{La proposition 1 est fausse}}$.

Proposition 2 :

La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est : $P(D)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$\boxed{P(D)} = P(B \cap D) + P\left(\overline{B} \cap D\right)$

$= P(B) \times P_B(D) + P\left(\overline{B}\right) \times P_{\overline{B}}(D)$

$= 0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,05$

$= 0,001 + 0,0475$

$= \boxed{0,0485}$. $\boxed{\text{La proposition 2 est vraie}}$.

Proposition 3 :

Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est :

$\boxed{P_D(B)} = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,001}{0,0485} \boxed{\approx 0,0206}$ à 10^{-4} près.

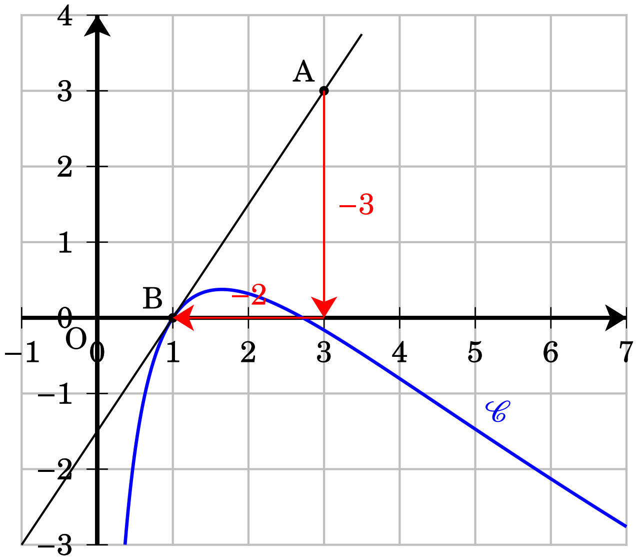
Ainsi $\boxed{\text{cette probabilité est supérieure à } 0,02}$. $\boxed{\text{La proposition 3 est fausse}}$.

Exercice n° 2

1) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point B d'abscisse 1.

Or $A(3\ ;\ 3)$ et $B(1\ ;\ 0)$. Ainsi $\boxed{f'(1)} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-3}{1-3} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} = \boxed{1,5}$.

On peut aussi obtenir le coefficient directeur $f'(1)$ de la droite (AB) graphiquement :



Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\boxed{f'(1)} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} = \boxed{1{,}5}$.

Réponse b)

2) D'après la courbe $\mathscr{C}$ de f sur $]0\ ;\ +\infty[$, on peut dresser le tableau de signes de f.

Or si F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors $F' = f$.

On aura donc le tableau de signes de F' et donc le tableau de variations de F sur $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		1		$\approx 2,8$		$+\infty$
Signe de F'=f		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de F		↘		↗		↘	

Ainsi F est strictement décroissante sur $]0\ ;\ 1]$ et sur $[2,8\ ;\ +\infty[$

et strictement croissante sur $[1\ ;\ 2,8]$.

Seule **la courbe a)** peut représenter une telle fonction F.

Réponse a)

Sujet I

Exercice n° 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2-\ln x}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

2) Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{2-\ln x}{x}dx$.

Exercice n° 2

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.

L'enquête révèle que 59% des élèves pratiquent le tri sélectif.

On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés.

Le nombre d'élèves de l'établissement est suffisamment grand pour que l'on considère que X suit une loi binomiale.

1) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

2) Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne pratique le tri sélectif. Arrondir à 10^{-3} près.

3) Calculer la probabilité qu'au moins deux des quatre élèves interrogés pratiquent le tri sélectif. Arrondir à 10^{-3} près.

Correction Sujet I

Exercice n° 1

$\boxed{f \text{ définie sur }]0\,;\,+\infty[\text{ par } f(x)=\dfrac{2-\ln x}{x}}$.

1) Dérivons la fonction H sur $]0\,;\,+\infty[$:

Pour tout $x>0$, $H(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$. Ainsi $H=\dfrac{1}{2}u^2$ avec $u(x)=\ln x$ et $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.

$H'=\dfrac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}uu'=uu'$ donc, pour tout $x>0$, $\boxed{H'(x)}=\ln x\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x}=\boxed{h(x)}$.

$\boxed{H \text{ est bien une primitive sur }]0\,;\,+\infty[\text{ de la fonction } h \text{ définie par } h(x)=\dfrac{\ln x}{x}}$.

2) Pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{2-\ln x}{x}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=2\times\dfrac{1}{x}-h(x)$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Ainsi, une primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est définie par : $F(x)=2\ln x-H(x)$.

L'intégrale $\boxed{I}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{2-\ln x}{x}dx=\int_1^{\mathrm{e}}f(x)dx=[F(x)]_1^{\mathrm{e}}=F(\mathrm{e})-F(1)$

$=2\ln(\mathrm{e})-\dfrac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2-\left(2\ln 1-\dfrac{1}{2}(\ln 1)^2\right)=2\times1-\dfrac{1}{2}\times1^2-0=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2}-\dfrac{1}{2}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$.

Exercice n° 2

1) La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\boxed{\text{de paramètres } n=4 \text{ et } p=0{,}59}$.

Pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

2) La probabilité qu'aucun des quatre élèves ne pratique le tri sélectif est :

$P(X=0)=(1-p)^4=(1-0{,}59)^4=0{,}41^4\approx0{,}028$.

Ou encore :

$P(X=0)=\dbinom{4}{0}\times0{,}59^0(1-0{,}59)^4=0{,}41^4\approx\boxed{0{,}028}$.

3) La probabilité qu'au moins deux des quatre élèves pratiquent le tri sélectif est $P(X\geqslant2)$.

$$\begin{aligned}P(X\geqslant2)&=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\&=\binom{4}{2}\times0{,}59^2(1-0{,}59)^{4-2}+\binom{4}{3}\times0{,}59^3(1-0{,}59)^{4-3}+\binom{4}{4}\times0{,}59^4(1-0{,}59)^{4-4}\\&\approx0{,}3511+0{,}3368+0{,}1212\approx0{,}81.\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser l'évènement contraire :

$P(X\geqslant2)=1-P(X<2)=1-(P(X=0)+P(X=1))\approx1-(0{,}0283+0{,}1627)\approx\boxed{0{,}81}$.

Sujet J

Exercice n° 1

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = x^2 - 4$.

1) Résoudre l'équation (E') : $y' + y = 0$.

2) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x^2 - 2x - 2$ est une solution particulière de (E).

3) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice n° 2

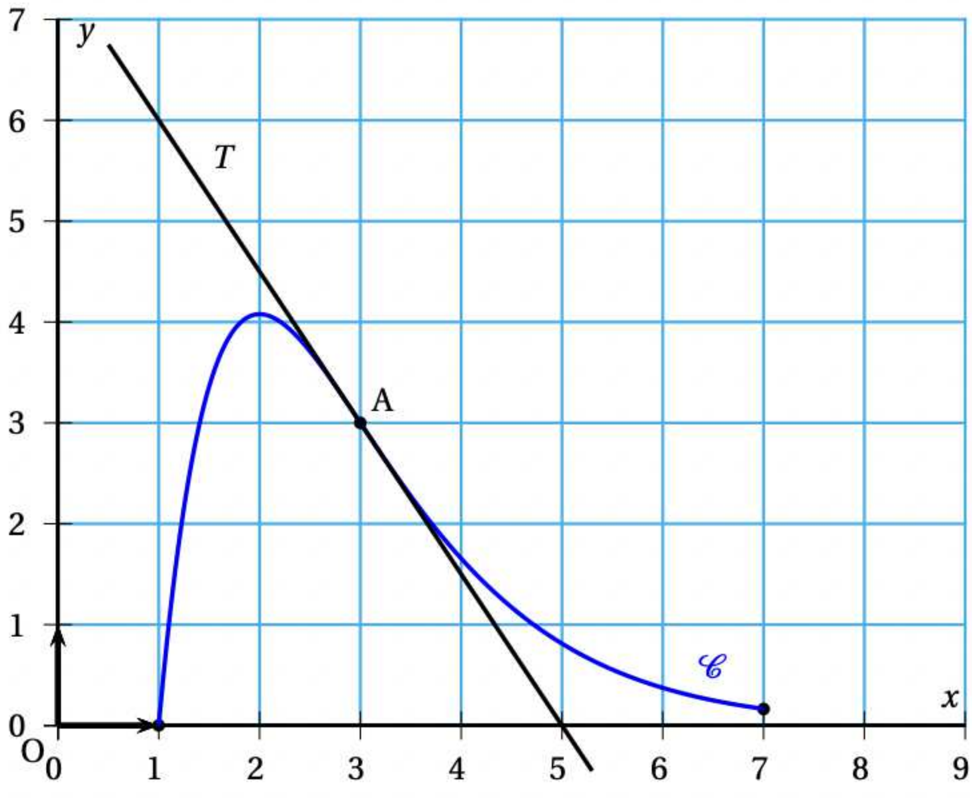
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1\,;7]$.

La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A$(3\,;3)$ et passe par le point de coordonnées $(5\,;0)$.

Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f :

a. $f'(3) = 3$ **b.** $f'(3) = \dfrac{3}{2}$ **c.** $f'(3) = -\dfrac{2}{3}$ **d.** $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$

2) On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f :

a. $f''(3) = 3$ **b.** $f''(3) = 0$ **c.** $f''(5) = 0$ **d.** $f''(2) = 0$

3) Toute primitive F de la fonction f est nécessairement :

a. croissante sur $[1\,;7]$ **b.** décroissante sur $[2\,;7]$ **c.** négative sur $[2\,;7]$ **d.** positive sur $[1\,;7]$

4) On note $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$:

a. $1 \leqslant I \leqslant 2$ **b.** $2 \leqslant I \leqslant 3$ **c.** $3 \leqslant I \leqslant 4$ **d.** $4 \leqslant I \leqslant 5$

Correction Sujet J

Exercice nº 1

$\boxed{\text{Equation différentielle } (E) : y' + y = x^2 - 4}$.

1) L'équation (E') : $y' + y = 0$ est équivalente à $y' = -y$.

Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions h définies sur $\mathbf{R}$ par :

$\boxed{h(x) = k\mathrm{e}^{-x}, \text{ avec } k \in \mathbf{R}}$.

2) Soit $g(x) = x^2 - 2x - 2$. Alors $g'(x) = 2x - 2$.

$g'(x) + g(x) = \cancel{2x} - 2 + x^2 - \cancel{2x} - 2 = x^2 - 2 - 2 = x^2 - 4$.

Donc

$\boxed{\text{la fonction } g \text{ définie sur } \mathbf{R} \text{ par } g(x) = x^2 - 2x - 2 \text{ est bien une solution particulière de } (E)}$.

3) Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$\boxed{f(x) = k\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x - 2, \text{ avec } k \in \mathbf{R}}$.

Exercice nº 2

1) $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente T au point A d'abscisse 3.

Par lecture graphique la tangente T passe par les points $A(3;3)$ et $B(5;0)$, le coefficient directeur vaut : $f'(3) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-3}{5-3} = -\dfrac{3}{2}$, $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$. **c'est la réponse d.**

2) Le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ car au point A la tangente traverse la courbe. Ainsi $f''(3) = 0$. **c'est la réponse b.**

3) Comme $F'(x) = f(x)$ (puisque F est une primitive de f) et que, pour tout $x \in [1\ ;\ 7]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $F'(x) \geqslant 0$ sur ce même intervalle, la fonction F est donc croissante sur $[1\,;\,7]$. **C'est la réponse a.**

4) L'intégrale I est l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ entre $x = 3$ et $x = 4$. Par lecture graphique, on peut compter entre 3 et 4 carreaux-unité : $3 \leqslant I \leqslant 4$. **C'est la réponse c.**

SUJET K

Exercice n° 1

Pour entrer dans un immeuble, on doit composer un code à 4 chiffres. Dans ce code, il y a deux chiffres 1, un chiffre 2 et un chiffre 3.

1) Combien de codes différents peut-on créer ?

2) Combien de codes commencent par 1 et finissent par 2 ?

3) Quelle est la probabilité de trouver le bon code dès le premier essai ? Arrondir à 10^{-2} près.

Exercice n° 2

Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(x) = 2x\ln x$.

1) Montrer que H est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = 2\ln x + 2$.

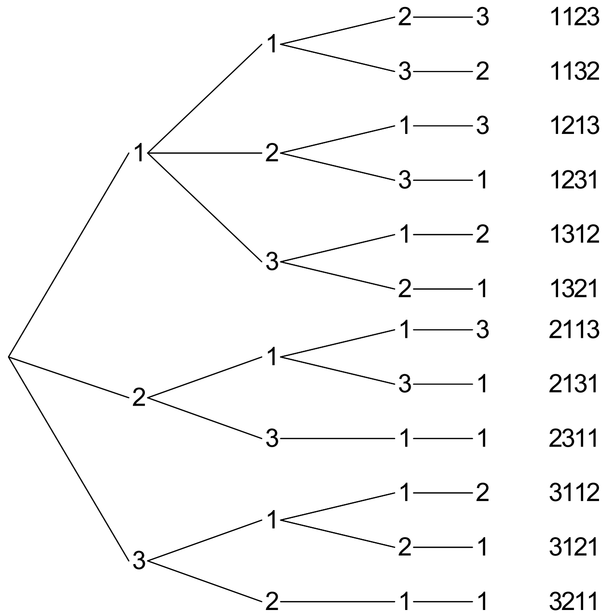
2) En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} h(x)dx$.

Correction Sujet K

Exercice n° 1

Pour entrer dans un immeuble, on doit composer un code à 4 chiffres. Dans ce code, il y a deux chiffres 1, un chiffre 2 et un chiffre 3.

1) Pour déterminer le nombre de codes différents, on peut faire un arbre de choix :



$\boxed{\text{On peut donc créer 12 codes différents.}}$

2) 2 codes commencent par 1 et finissent par 2 : $\boxed{1132 \text{ et } 1312}$.

3) On compte 12 codes différents. La probabilité de trouver le bon code dès le premier essai est donc de $\boxed{\dfrac{1}{12} \approx 0,08}$.

Exercice n° 2

$\boxed{H \text{ est la fonction définie sur }]0\ ;\ +\infty[\text{ par } H(x) = 2x\ln x}$.

1) Dérivons H sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$H = uv$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = \ln x$. Alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$H' = u'v + uv'$ donc, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $H'(x) = 2\ln x + 2\cancel{x} \times \dfrac{1}{\cancel{x}} = 2\ln x + 2 = h(x)$.

Donc $\boxed{H \text{ est une primitive de la fonction } h \text{ définie par } h(x) = 2\ln x + 2}$.

2) $\boxed{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} h(x)dx = [H(x)]_1^{\mathrm{e}} = H(\mathrm{e}) - H(1) = 2\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - 2 \times 1 \times \ln 1 = 2\mathrm{e} \times 1 - 2 \times 0 = \boxed{2\mathrm{e}}$.

Sujet L

Exercice n° 1

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 2\pi]$ par $f(x) = x - 2\sin x$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'expression de $f'(x)$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ 2\pi]$.

3) En déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ 2\pi]$.

4) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse π.

Exercice n° 2

Soir $F = \{q, r, s, t\}$.

1) **a)** Lister les combinaisons de 3 éléments de F.

b) Combien y en a-t-il ?

c) Le nombre de combinaisons de 3 éléments de F est égal à $\binom{4}{3}$. Rappeler une formule permettant de calculer ce coefficient binomial et vérifier le résultat précédent ?

2) **a)** Déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments de F sans les lister.

b) Vérifier ce résultat en listant toutes les combinaisons de 2 éléments de F.

Correction Sujet L

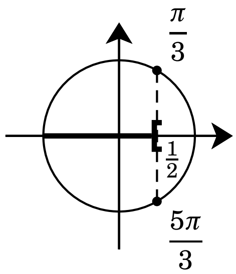
Exercice n° 1

$\boxed{f \text{ définie sur } [0\ ;\ 2\pi] \text{ par } f(x) = x - 2\sin x}$.

1) Pour tout $x \in [0\ ;\ 2\pi]$, $\boxed{f'(x) = 1 - 2\cos x}$.

2) Soit $x \in [0\ ;\ 2\pi]$.

$f'(x) > 0 \iff 1 - 2\cos x > 0 \iff 1 > 2\cos x \iff \cos x < \dfrac{1}{2} \iff x \in \left]\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{5\pi}{3}\right[$.



3) Tableau de variations de f sur $[0\ ;\ 2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$	$\searrow$	2π

* $f(0) = 0 - 2\sin 0 = -2 \times 0 = 0$.

* $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} - 2\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - \cancel{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.

* $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{5\pi}{3} - 2\sin\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} - \cancel{2} \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$

$f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$.

* $f(2\pi) = 2\pi - 2\sin 2\pi = 2\pi - 2 \times 0 = 2\pi$.

4) La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse π a pour équation :

$\boxed{y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)}$.

Or $\boxed{f(\pi)} = \pi - 2\sin\pi = \pi - 2 \times 0 = \boxed{\pi}$ et $\boxed{f'(\pi)} = 1 - 2\cos\pi = 1 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = \boxed{3}$.

Ainsi $T : y = 3(x - \pi) + \pi \iff T : y = 3x - 3\pi + \pi \iff \boxed{T : y = 3x - 2\pi}$.

Exercice n° 2

Soir $F = \{q, r, s, t\}$.

1) a) Les combinaisons de 3 éléments de F : $\{q, r, s\}$; $\{q, r, t\}$; $\{q, s, t\}$; $\{r, s, t\}$.

b) Il y a 4 combinaisons de 3 éléments de F.

c) Le nombre de combinaisons de 3 éléments de F est égal à $\binom{4}{3}$.

Formule : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ici : $\binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{4!}{3! \times 1!} = \dfrac{4!}{3!} = \dfrac{\cancel{1 \times 2 \times 3} \times 4}{\cancel{1 \times 2 \times 3}} = 4$. On retrouve le résultat précédent.

2) a) Le nombre de combinaisons de 2 éléments de F est le coefficient binomial :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1 \times 2 \times 1 \times 2} = \frac{2 \times 3 \times \cancel{4}}{\cancel{4}} = 2 \times 3 = \boxed{6}.$$

b) Les combinaisons de 2 éléments de F sont : $\{q,r\}$; $\{q,s\}$; $\{q,t\}$; $\{r,s\}$; $\{r,t\}$; $\{s,t\}$.

Il y en bien 6.

SUJET M

Exercice n° 1

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) Soit u la fonction définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par : $u(x)=3\ln(x)-2x+1$.
Soit $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u dans un repère.

Affirmation 1 : La tangente à $\mathscr{C}_u$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y=x-2$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(x)=3\mathrm{e}^{-2x+1}$.

Affirmation 2 : La fonction G définie sur $\mathbf{R}$ par $G(x)=-6\mathrm{e}^{-2x+1}+6$ est la primitive de g qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$.

3) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $\left[-8\,;-0,5\right]$ par : $h(x)=\dfrac{4x+1}{x^2}$.

Affirmation 3 : La fonction h est concave sur l'intervalle $\left[-8\,;-0,75\right]$.

Exercice n° 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y'-2y=5$.

1) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

2) Déterminer la fonction f, solution de l'équation (E), telle que $f(1)=\dfrac{3}{2}$.

Correction Sujet M

Exercice n° 1

1) Pour tout $x \in \left]0\ ;+\infty\right[$, $u'(x) = \dfrac{3}{x} - 2$.

Donc $u'(1) = 1$ et d'autre part $u(1) = -1$.

La tangente à $\mathscr{C}_u$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$y = u'(1)(x-1) + u(1) \iff y = x - 1 - 1 \iff y = x - 2$. **Affirmation 1 : Vraie**

2) La fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 3\mathrm{e}^{-2x+1}$ est continue. Elle admet donc des primitives sur $\mathbf{R}$.

Si G est une primitive de g sur $\mathbf{R}$ alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $G'(x) = g(x)$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $G'(x) = -6 \times \left(-2\mathrm{e}^{-2x+1}\right) + 0 = 12\mathrm{e}^{-2x+1} \neq g(x)$.

La fonction G n'est pas une primitive de la fonction g. **Affirmation 2 : Fausse**

3) Dérivons h deux fois.

$h = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 4x+1$ et $v(x) = x^2$. On a : $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2x$.

$h' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc

$$h'(x) = \frac{4x^2 - (4x+1)\times 2x}{x^4} = \frac{4x^2 - 8x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-4x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x(-4x-2)}{x^4} = \frac{-4x-2}{x^3}.$$

$h' = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = -4x-2$ et $v(x) = x^3$. On a : $u'(x) = -4$ et $v'(x) = 3x^2$.

$h'' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc

$$h''(x) = \frac{-4x^3 - (-4x-2)\times 3x^2}{x^6} = \frac{-4x^3 + 12x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{8x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{x^2(8x+6)}{x^6} = \frac{8x+6}{x^4}.$$

Etudions maintenant le signe de h''.

Pour tout $x \in \left[-8\ ;\ -0,75\right]$, $x^4 > 0$ donc $h''(x)$ a le même signe que $8x+6$.

$8x + 6 \leqslant 0 \iff x \leqslant -\dfrac{6}{8} \iff x \leqslant -0,75$.

Conclusion : $h''(x) \leqslant 0$ sur $\left[-8\ ; -0,75\right]$, donc h est concave sur $\left[-8\ ;\ -0,75\right]$.

Affirmation 3 : Vraie

Exercice n° 2

$\boxed{\text{Equation différentielle } (E) : y' - 2y = 5 \iff y' = 2y + 5}$.

1) Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ par :

$\boxed{f(x) = k\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2} \text{ avec } k \in \mathbf{R}}$

2) On cherche le réel k tel que :

$f(1) = \dfrac{3}{2} \iff k\mathrm{e}^{2\times 1} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{2} \iff k\mathrm{e}^2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} \iff k\mathrm{e}^2 = \dfrac{8}{2} \iff k\mathrm{e}^2 = 4 \iff k = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

La fonction f solution de l'équation (E) telle que $f(1)=\dfrac{3}{2}$ est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$\boxed{f(x)} = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{5}{2}\boxed{= 4\mathrm{e}^{2x-2} - \dfrac{5}{2}}$.