Correction : angles orientés de vecteurs

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1

1) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)}$:

Le triangle ACD est rectangle isocèle en D.
Ainsi $\left(\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ et les deux angles à la base sont égaux : $\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$.
Or la somme des angles (orientés positivement) d'un triangle est égale à π radians, on a donc (dans le triangle ACD) :

$2\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\right)=\pi$

$\iff 2\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)+\dfrac{\pi}{2}=\pi$

$\iff 2\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{2}$

$\iff 2\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

$\iff \boxed{\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{4}}$.

2) $\boxed{\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)}$:

D'après la relation de Chasles, on a : $\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)$ (*).

Or dans le triangle ACD isocèle en D, les deux angles à la base sont égaux : $\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

D'après le relation de Chasles, on a : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$

$\iff \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)-\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$.

Or le triangle ABD est rectangle en A donc $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

$\iff \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Dans le triangle ABC isocèle en A, les deux angles à la base sont égaux : $\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)$.

Or la somme des angles (orientés positivement) d'un triangle est égale à π radians, on a donc (dans le triangle ABC) :

$2\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=\pi$

$\iff 2\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)+\dfrac{\pi}{4}=\pi$

$\iff 2\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{4}$

$\iff 2\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$

$\iff \left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{3\pi}{8}$.

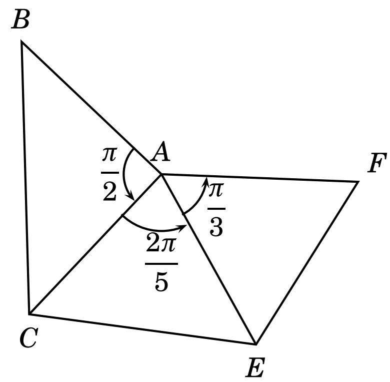
Ainsi d'après (*) : $\boxed{\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)}=\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{2\pi}{8}+\dfrac{3\pi}{8}=\boxed{\dfrac{5\pi}{8}}$.

3) $\boxed{\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{DA}\right)}$:

D'après la relation de Chasles, on a : $\boxed{\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{DA}\right)}=\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)+\left(-\overrightarrow{AB}\,;\,-\overrightarrow{AD}\right)$

$=\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{4\pi}{8}=\boxed{\dfrac{7\pi}{8}}$.

✎ Exercice 2



a. $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{2}$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{10\pi}{30} - \frac{12\pi}{30} - \frac{15\pi}{30}$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{37\pi}{30} = -\frac{37\pi}{30} + 2\pi = -\frac{37\pi}{30} + \frac{60\pi}{30}$

$\boxed{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{23\pi}{30}\ [2\pi]}$.

b. * La somme des angles orientés positivement d'un triangle est égale à π. Or le triangle ABC est isocèle en A donc les angles en B et en C sont de même mesure.

Ainsi : $2\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

d'où $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

* $\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}\right) + \left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$

$\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}\right) + \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}\right) + \pi + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$

$\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{5} + \pi + \frac{\pi}{4}$

$\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{20\pi}{60} - \frac{24\pi}{60} + \frac{60\pi}{60} + \frac{15\pi}{60}$

$\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{71\pi}{60} = \frac{71\pi}{60} - 2\pi = \frac{71\pi}{60} - \frac{120\pi}{60}$

$\boxed{\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{49\pi}{60}}$.

c. * Dans le triangle ABC isocèle en A, on a : $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{4}$.

* $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right)$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{23\pi}{30} - \frac{\pi}{4}$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{46\pi}{60} - \frac{15\pi}{60}$

$\boxed{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{31\pi}{60}}$.

d. * La somme des angles orientés positivement d'un triangle est égale à π. Or le triangle ACE est isocèle en A donc les angles en C et en E sont de même mesure.

Ainsi : $2\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}\right) = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$

d'où $\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$.

* $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{EC}\right)$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}\right) + \pi$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}\right) = \frac{31\pi}{60} - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{10} + \pi$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}\right) = \frac{31\pi}{60} - \frac{15\pi}{60} - \frac{18\pi}{60} + \frac{60\pi}{60}$

$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}\right) = \frac{58\pi}{60}$

$\boxed{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}\right) = \frac{29\pi}{30}}$.

✎ Exercice 3

1) Comme le triangle ADE est isocèle, chacun de ses angles mesure 60° donc $\left(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$\left(\overrightarrow{AE}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{2\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{3\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}$.

Dans le losange $ABCD$, la somme des 4 angles est égale à 360° et les angles opposés sont égaux. On a donc :

$2\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)+2\left(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA}\right)=2\pi$

$\iff 2\dfrac{\pi}{6}+2\left(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA}\right)=2\pi$

$\iff \dfrac{\pi}{3}+2\left(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA}\right)=2\pi$

$\iff 2\left(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA}\right)=2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

$\iff 2\left(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{6\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}$

$\iff 2\left(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{5\pi}{3}$

$\iff \left(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{5\pi}{3}\div 2$

$\iff \boxed{\left(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{5\pi}{6}}$.

2) D'après la relation de Chasles, on a :

$\left(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{NP}\right)=\left(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CM}\right)+\left(\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{NP}\right)$

$=-\cancel{\dfrac{\pi}{2}}+\pi+\cancel{\dfrac{\pi}{2}}+\pi$ (car 1) $ABCD$ est un losange donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de sens contraires et 2)$CMNP$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires de sens contraires)

$=2\pi=0\ [2\pi]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires (de mêmes sens)

et donc $\boxed{\text{les droites } (AE) \text{ et } (NP) \text{ sont parallèles}}$.