Exercice

a) $\boxed{f \text{ définie sur } \mathbf{R} \text{ par } f(x) = -2x+3 \text{ en } a=5}$

* $f(5+h) = -2(5+h)+3 = -10-2h+3 = -2h-7$;

* $f(5) = -2\times 5+3 = -10+3 = -7$;

* $f(5+h)-f(5) = -2h-\cancel{7}+\cancel{7} = -2h$;

* $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \dfrac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}} = -2.$

* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -2 = -2.$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 5 et } f'(5) = -2}$.

b) $\boxed{f \text{ définie sur } \mathbf{R} \text{ par } f(x) = 4x-x^2 \text{ en } a=-1}$

* $f(-1+h) = 4(-1+h)-(-1+h)^2 = -4+4h-(1-2h+h^2) = -4+4h-1+2h-h^2 = -h^2+6h-5$;

* $f(-1) = 4\times(-1)-(-1)^2 = -4-1 = -5$;

* $f(-1+h)-f(-1) = -h^2+6h-\cancel{5}+\cancel{5} = -h^2+6h$;

* $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{-h^2+6h}{h} = \dfrac{\cancel{h}(-h+6)}{\cancel{h}} = -h+6 = 6-h.$

* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6-h) = 6-0 = 6.$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } -1 \text{ et } f'(-1) = 6}$.

c) $\boxed{f \text{ définie sur } \left]-\dfrac{5}{3}\ ;\ +\infty\right[\text{ par } f(x) = \dfrac{1}{3x+5} \text{ en } a=0}$

* $f(0+h) = f(h) = \dfrac{1}{3h+5}$;

* $f(0) = \dfrac{1}{3\times 0+5} = \dfrac{1}{5}$;

* $f(0+h)-f(0) = \dfrac{1}{3h+5} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{5}{5(3h+5)} - \dfrac{3h+5}{5(3h+5)} = \dfrac{5-(3h+5)}{5(3h+5)} = \dfrac{\cancel{5}-3h-\cancel{5}}{15h+25} = \dfrac{-3h}{15h+25}$;

* $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{\dfrac{-3h}{15h+25}}{\dfrac{h}{1}} = \dfrac{-3\cancel{h}}{15h+25} \times \dfrac{1}{\cancel{h}} = \dfrac{-3}{15h+25}.$

* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-3}{15h+25} = \dfrac{-3}{15\times 0+25} = \dfrac{-3}{25} = -\dfrac{3}{25}.$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = -\dfrac{3}{25}}$.

d) $\boxed{f \text{ définie sur }]-2\ ;\ +\infty[\text{ par } f(x) = \dfrac{x}{x+2} \text{ en } a=1}$

* $f(1+h) = \dfrac{1+h}{1+h+2} = \dfrac{1+h}{3+h}$;

* $f(1) = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$;

* $f(1+h)-f(1) = \dfrac{1+h}{3+h} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3(1+h)}{3(3+h)} - \dfrac{3+h}{3(3+h)} = \dfrac{3+3h}{9+3h} - \dfrac{3+h}{9+3h} = \dfrac{3+3h-(3+h)}{9+3h} = \dfrac{\cancel{3}+3h-\cancel{3}-h}{9+3h} = \dfrac{2h}{9+3h}$;

* $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{\dfrac{2h}{9+3h}}{\dfrac{h}{1}} = \dfrac{2\cancel{h}}{9+3h} \times \dfrac{1}{\cancel{h}} = \dfrac{2}{9+3h}.$

* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{9+3h} = \dfrac{2}{9+3\times 0} = \dfrac{2}{9}$. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 1 et } f'(1) = \dfrac{2}{9}}$.

e) $\boxed{f \text{ définie sur }]-\infty\,;\,3] \text{ par } f(x)=\sqrt{3-x} \text{ en } a=-1}$

* $f(-1+h)=\sqrt{3-(-1+h)}=\sqrt{3+1-h}=\sqrt{4-h}$;

* $f(-1)=\sqrt{3-(-1)}=\sqrt{4}=2$;

* $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\dfrac{\sqrt{4-h}-2}{h}=\dfrac{\left(\sqrt{4-h}-2\right)\left(\sqrt{4-h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{4-h}^2-2^2}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=\dfrac{\cancel{4}-h-\cancel{4}}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=\dfrac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{4-h}+2\right)}$

$=\dfrac{-1}{\sqrt{4-h}+2}$.

* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{4-h}+2}=\dfrac{-1}{\sqrt{4-0}+2}=\dfrac{-1}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{-1}{2+2}=-\dfrac{1}{4}$.

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } -1 \text{ et } f'(-1)=-\dfrac{1}{4}}$.