Correction : fonction trigonométrique

www.bossetesmaths.com

Exercice

La fonction tangente f est telle que : $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1) Valeurs interdites : $\cos x=0 \iff x=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbf{Z}$.

Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbf{Z}\right\}}$.

2) Pour tout $x\in\mathscr{D}_f$, $f(x+\pi)=\dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\dfrac{-\sin x}{-\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}=f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est périodique de période } \pi}$.

On peut donc étudier f sur l'intervalle $\boxed{\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[}$ (d'amplitude π).

3) Pour tout $x\in\mathscr{D}_f$, $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.
Sa courbe $\mathscr{C}_f$ sera donc symétrique par rapport à l'origine O du repère.

On peut donc étudier f sur l'intervalle $\boxed{\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[}$.

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$;

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$. Or, pour tout $x\in\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos x>0$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0^+$.

Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=+\infty}$.

On peut en déduire que $\boxed{\text{la droite d'équation } x=\dfrac{\pi}{2} \text{ est une asymptote verticale à la courbe } \mathscr{C}_f}$.

5) $f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\sin x$ et $v(x)=\cos x$. On a : $u'(x)=\cos x$ et $v'(x)=-\sin x$.

$f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc, pour tout $x\in\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)=\dfrac{\cos^2 x-\sin x\times(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\boxed{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

6) Pour tout $x\in\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos x>0$ donc $\cos^2 x>0$ et par quotient $f'(x)>0$

donc la fonction f est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Tableau de variations de f :

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

$f(0)=\dfrac{\sin 0}{\cos 0}=\dfrac{0}{1}=0$.

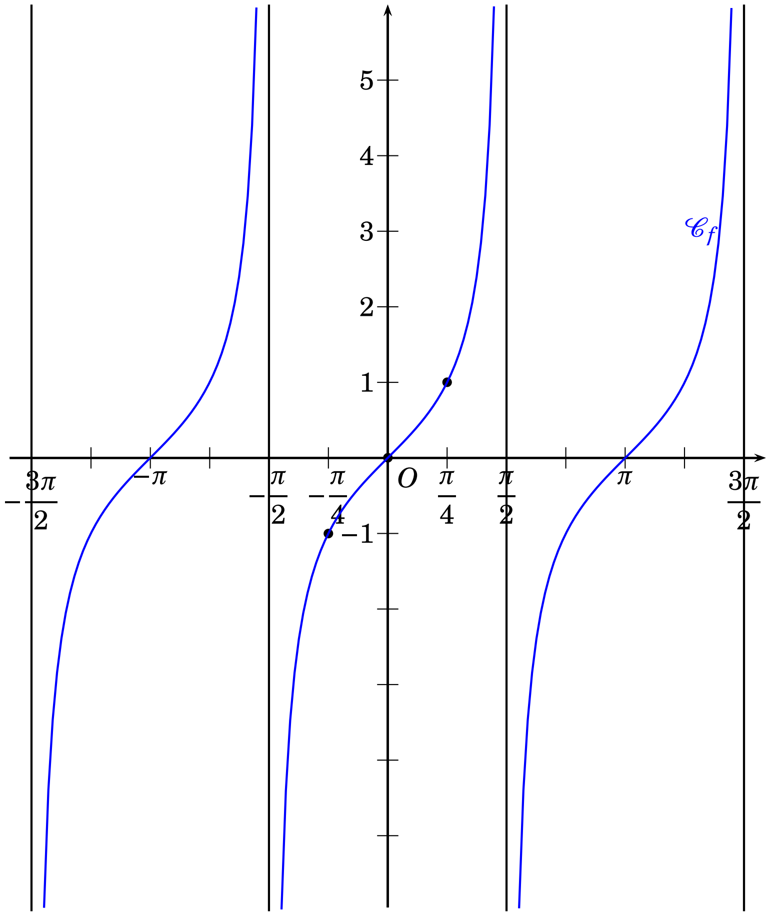
7) Courbe de f sur $\mathscr{D}_f$:

On peut calculer $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$.

On trace d'abord la courbe de f sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Puis, sachant que la courbe est symétrique par rapport à O, on étend la courbe à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$.

Puis par périodicité, on étend la courbe à tout l'ensemble $\mathscr{D}_f$.


5
4
3
2
1
−1
O
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
$\mathscr{C}_f$