Correction : équation logarithmique $\ln a = \ln b$

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1

1) $\boxed{\ln(x+1) = \ln(3-2x)}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

* $x+1>0 \iff x>-1 \iff x \in]-1\ ;\ +\infty[$;

* $3-2x>0 \iff 3>2x \iff \dfrac{3}{2}>x \iff x<\dfrac{3}{2} \iff x \in \left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[$.

Ainsi $\mathscr{D} =]-1\ ;\ +\infty[\cap \left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[$ donc $\boxed{\mathscr{D} = \left]-1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[}$.

• Résolution de l'équation :

$\ln(x+1) = \ln(3-2x) \iff x+1 = 3-2x \iff x+2x = 3-1 \iff 3x = 2 \iff x = \dfrac{2}{3}$.

• Conclusion : On a $\dfrac{2}{3} \in \mathscr{D}$ donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}}$.

2) $\boxed{\ln(x^2-5x-14) = \ln(x-23)}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

* Etude du trinôme $x^2-5x-14$: $a=1$; $b=-5$; $c=-14$.

On obtient $\Delta = 81$ et le trinôme possède deux racines : $x_1 = -2$ et $x_2 = 7$.

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$x^2-5x-14$		$+$	0	$-$	0	$+$	$(a=1)$

Ainsi $x^2-5x-14>0 \iff x \in]-\infty\ ;\ -2[\cup]7\ ;\ +\infty[$.

* $x-23>0 \iff x>23 \iff x \in]23\ ;\ +\infty[$.

Ainsi $\mathscr{D} = (]-\infty\ ;\ -2[\cup]7\ ;\ +\infty[) \cap]23\ ;\ +\infty[$ donc $\boxed{\mathscr{D} =]23\ ;\ +\infty[}$.

• Résolution de l'équation :

$\ln(x^2-5x-14) = \ln(x-23) \iff x^2-5x-14 = x-23 \iff x^2-5x-14-x+23 = 0 \iff x^2-6x+9=0$

$\iff (x-3)^2 = 0 \iff x-3=0$ (produit nul) $\iff x=3$.

• Conclusion : On a $3 \notin \mathscr{D}$ donc $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.

3) $\boxed{\ln(2x-5) = -\ln 2}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

On doit avoir $2x-5>0 \iff 2x>5 \iff x>\dfrac{5}{2} \iff x \in \left]\dfrac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$. Donc $\boxed{\mathscr{D} = \left]\dfrac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[}$.

• Résolution de l'équation :

$\ln(2x-5) = -\ln 2 \iff \ln(2x-5) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff 2x-5 = \dfrac{1}{2} \iff 2x = \dfrac{1}{2}+5 \iff 2x = \dfrac{1}{2}+\dfrac{10}{2}$

$\iff 2x = \dfrac{11}{2} \iff x = \dfrac{11}{2} \div 2 \iff x = \dfrac{11}{2} \div \dfrac{2}{1} \iff x = \dfrac{11}{2} \times \dfrac{1}{2} \iff x = \dfrac{11}{4}$.

• Conclusion : On a $\dfrac{11}{4} = 2,75$ et $\dfrac{5}{2} = 2,5$; or $2,75 > 2,5$ donc $\dfrac{11}{4} \in \mathscr{D}$ et ainsi $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{11}{4}\right\}}$.

4) $\boxed{2\ln(x+2) = \ln(5x+6)}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

* $x+2>0 \iff x>-2 \iff x \in]-2\ ;\ +\infty[$;

* $5x+6>0 \iff 5x>-6 \iff x>-\dfrac{6}{5} \iff x\in\left]-\dfrac{6}{5}\ ;\ +\infty\right[$.

Ainsi $\mathscr{D}=]-2\ ;\ +\infty[\cap\left]-\dfrac{6}{5}\ ;\ +\infty\right[$; or $-\dfrac{6}{5}=-1,2$ donc $\boxed{\mathscr{D}=\left]-\dfrac{6}{5}\ ;\ +\infty\right[}$.

• Résolution de l'équation :

$2\ln(x+2)=\ln(5x+6) \iff \ln\left[(x+2)^2\right]=\ln(5x+6) \iff \ln(x^2+4x+4)=\ln(5x+6)$

$\iff x^2+4x+4=5x+6 \iff x^2+4x+4-5x-6=0 \iff x^2-x-2=0.$

Etude du trinôme x^2-x-2 : $a=1$; $b=-1$; $c=-2$.

On obtient $\Delta=9$ et l'équation $x^2-x-2=0$ possède deux solutions : $x_1=-1$ et $x_2=2$.

• Conclusion : On a $-1\in\mathscr{D}$ et $2\in\mathscr{D}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\{-1\ ;\ 2\}}$.

5) $\boxed{\ln(x^2+10x+25)=0}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

* $x^2+10x+25=(x+5)^2$. Ainsi $x^2+10x+25=0 \iff (x+5)^2=0 \iff x+5=0$ (produit nul) $\iff x=-5$.

Comme un carré est toujours positif ou nul, on a : $x^2+10x+25>0 \iff (x+5)^2>0 \iff (x+5)^2\neq 0$

$\iff x\neq -5 \iff x\in\mathbf{R}\setminus\{-5\}$. Donc $\boxed{\mathscr{D}=\mathbf{R}\setminus\{-5\}}$.

• Résolution de l'équation :

$\ln(x^2+10x+25)=0 \iff \ln(x^2+10x+25)=\ln 1 \iff x^2+10x+25=1 \iff x^2+10x+25-1=0$

$\iff x^2+10x+24=0.$

Etude du trinôme $x^2+10x+24$: $a=1$; $b=10$; $c=24$.

On obtient $\Delta=4$ et l'équation $x^2+10x+24=0$ possède deux solutions : $x_1=-6$ et $x_2=-4$.

• Conclusion : On a $-6\neq-5$ et $-4\neq-5$ donc $-6\in\mathscr{D}$ et $-4\in\mathscr{D}$ et ainsi $\boxed{\mathscr{S}=\{-6\ ;\ -4\}}$.

6) $\boxed{\ln(x^2-2)=\ln(2x+1)}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

* Etude du trinôme $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	$(a=1)$

Ainsi $x^2-2>0 \iff x\in\,]-\infty\ ;\ -\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$.

* $2x+1>0 \iff 2x>-1 \iff x<-\dfrac{1}{2} \iff x\in\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

Donc $\mathscr{D}=\left(]-\infty\ ;\ -\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2}\ ;\ +\infty[\right)\cap\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$; or $\sqrt{2}\approx 1,414$ donc $\boxed{\mathscr{D}=]\sqrt{2}\ ;\ +\infty[}$.

• Résolution de l'équation :

$\ln(x^2-2)=\ln(2x+1) \iff x^2-2=2x+1 \iff x^2-2-2x-1=0 \iff x^2-2x-3=0.$

Etude du trinôme x^2-2x-3 : $a=1$; $b=-2$; $c=-3$.

On obtient $\Delta=16$ et l'équation $x^2-2x-3=0$ possède deux solutions : $x_1=-1$ et $x_2=3$.

• Conclusion : On a $-1\notin\mathscr{D}$ mais $3\in\mathscr{D}$; ainsi $\boxed{\mathscr{S}=\{3\}}$.

7) $\boxed{\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(5x-4)}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

* $x+4>0 \iff x>-4 \iff <\in]-4\ ;\ +\infty[$;

* $x-2>0 \iff x>2 \iff x\in]2\ ;\ +\infty[$;

* $5x-4>0 \iff 5x>4 \iff x>\dfrac{4}{5} \iff x\in\left]\dfrac{4}{5}\ ;\ +\infty\right[$.

Donc $\mathscr{D}=]-4\ ;\ +\infty[\cap]2\ ;\ +\infty[\cap\left]\dfrac{4}{5}\ ;\ +\infty\right[$; or $\dfrac{4}{5}=0,8$ ainsi $\boxed{\mathscr{D}=]2\ ;\ +\infty[}$.

• Résolution de l'équation :

$\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(5x-4) \iff \ln[(x+4)(x-2)]=\ln(5x-4) \iff (x+4)(x-2)=5x-4$

$\iff x^2+4x-2x-8-5x+4=0 \iff x^2-3x-4=0.$

Etude du trinôme x^2-3x-4 : $a=1$; $b=-3$; $c=-4$.

On obtient $\Delta=25$ et l'équation $x^2-2x-3=0$ possède deux solutions : $x_1=-1$ et $x_2=4$.

• Conclusion : On a $-1 \notin \mathscr{D}$ mais $4 \in \mathscr{D}$; ainsi $\boxed{\mathscr{S}=\{4\}}$.

8) $\boxed{\ln\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)=0}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

* Valeur interdite : $x-3=0 \iff x=3$;

* $2x=0 \iff x=\dfrac{0}{2} \iff x=0$;

* Signe de $\dfrac{2x}{x-3}$:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	$(m=2)$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	$(m=1)$
$\dfrac{2x}{x-3}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Ainsi $\dfrac{2x}{x-3}>0 \iff x\in]-\infty\ ;\ 0[\cup]3\ ;\ +\infty[$. Donc $\boxed{\mathscr{D}=]-\infty\ ;\ 0[\cup]3\ ;\ +\infty[}$.

• Résolution de l'équation :

$\ln\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)=0 \iff \ln\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)=\ln 1 \iff \dfrac{2x}{x-3}=1 \iff 2x=x-3 \iff 2x-x=-3 \iff x=-3.$

• Conclusion : On a $-3\in\mathscr{D}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\{-3\}}$.

✎ Exercice 2 [En utilisant l'exponentielle]

1) $\boxed{\ln x=-3}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

On doit avoir $x>0$ soit $x\in]0\ ;\ +\infty[$ donc $\boxed{\mathscr{D}=]0\ ;\ +\infty[}$.

• Résolution de l'équation :

$\ln x=-3 \iff x=\mathrm{e}^{-3} \iff \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}.$

• Conclusion : On a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}>0$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\in\mathscr{D}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right\}}$.

2) $\boxed{\ln\dfrac{1}{x}=2}$

• Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation :

On doit avoir $x\neq 0$ et $\dfrac{1}{x}>0$ soit $x>0$ soit $x\in]0\ ;\ +\infty[$ donc $\boxed{\mathscr{D}=]0\ ;\ +\infty[}$.

• Résolution de l'équation :

$\ln\dfrac{1}{x}=2 \iff \dfrac{1}{x}=\mathrm{e}^2 \iff x=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}.$

• Conclusion : On a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}>0$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\in\mathscr{D}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right\}}$.

3) $\boxed{\ln(1-x)=1}$

• <u>Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation</u> :

$1-x>0 \iff 1>x \iff x<1 \iff x\in]-\infty\ ;\ 1[$ donc $\boxed{\mathscr{D}=]-\infty\ ;\ 1[}$.

• <u>Résolution de l'équation</u> :

$\ln(1-x)=1 \iff \ln(1-x)=\ln \mathrm{e} \iff 1-x=\mathrm{e} \iff 1-\mathrm{e}=x \iff x=1-\mathrm{e}$.

• <u>Conclusion</u> : On a $1-\mathrm{e}<1$ donc $1-\mathrm{e}\in\mathscr{D}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\{1-\mathrm{e}\}}$.

4) $\boxed{\ln(1+\mathrm{e}^x)=\ln 2}$

• <u>Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation</u> :

Pour tout $x\in\mathbf{R}$, $\mathrm{e}^x>0$ donc $1+\mathrm{e}^x>0$ et ainsi $\boxed{\mathscr{D}=\mathbf{R}}$.

• <u>Résolution de l'équation</u> :

$\ln(1+\mathrm{e}^x)=\ln 2 \iff 1+\mathrm{e}^x=2 \iff \mathrm{e}^x=2-1 \iff \mathrm{e}^x=1 \iff x=\ln 1 \iff x=0$.

• <u>Conclusion</u> : On a $0\in\mathbf{R}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\{0\}}$.

5) $\boxed{\ln(\mathrm{e}^{2x}-1)=-2}$

• <u>Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation</u> :

$\mathrm{e}^{2x}-1>0 \iff \mathrm{e}^{2x}>1 \iff 2x>\ln 1 \iff 2x>0 \iff x>\dfrac{0}{2} \iff x>0 \iff x\in]0\ ;\ +\infty[$.

Donc $\boxed{\mathscr{D}=]0\ ;\ +\infty[}$.

• <u>Résolution de l'équation</u> :

$\ln(\mathrm{e}^{2x}-1)=-2 \iff \mathrm{e}^{2x}-1=\mathrm{e}^{-2} \iff \mathrm{e}^{2x}=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} \iff 2x=\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) \iff x=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$.

• <u>Conclusion</u> : On a $1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}>1$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)>0$ donc $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)>0$ donc $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)\in\mathscr{D}$

et ainsi $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)\right\}}$.

6) $\boxed{\ln\left(\dfrac{x+3}{2x+2}\right)=1}$

• <u>Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'équation</u> :

* Valeur interdite : $2x+2=0 \iff 2x=-2 \iff x=-\dfrac{2}{2} \iff x=-1$;

* $x+3=0 \iff x=-3$;

* Signe de $\dfrac{x+3}{2x+2}$:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	$(m=1)$
$2x+2$		$-$		$-$	0	$+$	$(m=2)$
$\dfrac{x+3}{2x+2}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Ainsi $\dfrac{x+3}{2x+2}>0 \iff x\in]-\infty\ ;\ -3[\cup]-1\ ;\ +\infty[$. Donc $\boxed{\mathscr{D}=]-\infty\ ;\ -3[\cup]-1\ ;\ +\infty[}$.

• <u>Résolution de l'équation</u> :

$\ln\left(\dfrac{x+3}{2x+2}\right)=1 \iff \ln\left(\dfrac{x+3}{2x+2}\right)=\ln\mathrm{e} \iff \dfrac{x+3}{2x+2}=\mathrm{e} \iff x+3=\mathrm{e}(2x+2) \iff x+3=2\mathrm{e}x+2\mathrm{e}$

$\iff x-2\mathrm{e}x=2\mathrm{e}-3 \iff (1-2\mathrm{e})x=2\mathrm{e}-3 \iff x=\dfrac{2\mathrm{e}-3}{1-2\mathrm{e}}$.

• <u>Conclusion</u> : On a $\dfrac{2\mathrm{e}-3}{1-2\mathrm{e}}\approx-0,55$ donc $\dfrac{2\mathrm{e}-3}{1-2\mathrm{e}}\in\mathscr{D}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{2\mathrm{e}-3}{1-2\mathrm{e}}\right\}}$.