Correction : ensemble de définition d'une fonction

www.bossetesmaths.com

Exercice 1

La courbe de f commence lorsque $x=-4$ et se termine lorsque $x=7$, donc $\boxed{\mathscr{D}_f=[-4\,;\,7]}$.

Exercice 2

1) $\boxed{f(x)=\sqrt{3x+2}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff 3x+2\geqslant 0 \iff 3x\geqslant -2 \iff x\geqslant -\dfrac{2}{3}$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\left[-\dfrac{2}{3}\,;\,+\infty\right[}$.

2) $\boxed{f(x)=2x^2-4x+3}$: f est une fonction polynôme de degré 2 donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbf{R}}$.

3) $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{x}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff x\neq 0$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbf{R}^*=]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[}$.

4) $\boxed{f(x)=\dfrac{4x}{5x-1}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff 5x-1\neq 0 \iff 5x\neq 1 \iff x\neq \dfrac{1}{5}$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{5}\right\}=\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{5}\right[\cup\left]\dfrac{1}{5}\,;\,+\infty\right[}$.

5) $\boxed{f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{2-5x}}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff 2-5x\geqslant 0$ et $2-5x\neq 0 \iff 2-5x>0 \iff -5x>-2 \iff x<\dfrac{-2}{-5}$

$\iff x<\dfrac{2}{5}$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\left]-\infty\,;\,\dfrac{2}{5}\right[}$.

6) $\boxed{f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+1}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff x^2+1\neq 0$.

Or, pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $x^2\geqslant 0$ (un carré est toujours positif ou nul), donc $x^2+1>0$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbf{R}}$.

7) $\boxed{f(x)=\sqrt{x^2+3}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff x^2+3\geqslant 0$.

Or, pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $x^2\geqslant 0$ (un carré est toujours positif ou nul), donc $x^2+3>0$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbf{R}}$.

8) $\boxed{f(x)=\dfrac{2x-3}{(x-1)(2x+3)}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff (x-1)(2x+3)\neq 0$.

Or $(x-1)(2x+3)=0 \iff x-1=0$ ou $2x+3=0$ (un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul)

$\iff x=1$ ou $2x=-3 \iff x=1$ ou $x=-\dfrac{3}{2}$.

Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbf{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,1\right\}=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,1\right[\cup]1\,;\,+\infty[}$.

9) $\boxed{f(x)=\dfrac{-4x-1}{\sqrt{2+(x+5)^2}}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff 2+(x+5)^2\geqslant 0$ et $2+(x+5)^2\neq 0 \iff 2+(x+5)^2>0$.

Or, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $(x+5)^2\geqslant 0$ (un carré est toujours positif ou nul), donc $2+(x+5)^2>0$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbf{R}}$.

Exercice 3 (Premières et Terminales)

1) $\boxed{f(x)=\dfrac{10x}{4x^2+5x-6}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff 4x^2+5x-6\neq 0$.

Etude du trinôme $4x^2+5x-6$: $a=4$; $b=5$; $c=-6$. $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times4\times(-6)=25+96=121$.

$\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{121}=11$. L'équation $4x^2+5x-6=0$ possède deux solutions :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-11}{2\times4}=\dfrac{-16}{8}=-2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+11}{2\times4}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$.

Donc : $f(x)$ est bien définie $\iff x \neq -2$ et $x \neq \dfrac{3}{4}$.

Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbf{R} \setminus \left\{-2\ ;\ \dfrac{3}{4}\right\} =]-\infty\ ;\ -2[\cup \left]-2\ ;\ \dfrac{3}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3}{4}\ ;\ +\infty\right[}$.

2) $\boxed{f(x) = \sqrt{-5x^2+31x-6}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff -5x^2+31x-6 \geqslant 0$.

Etude du trinôme $-5x^2+31x-6$: $a=-5$; $b=31$; $c=-6$. $\Delta = b^2-4ac = 31^2-4\times(-5)\times(-6) = 961-120 = 841$.

$\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{841} = 29$. Le trinôme $-5x^2+31x-6$ possède deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-31-29}{2\times(-5)} = \dfrac{-60}{-10} = 6$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-31+29}{2\times(-5)} = \dfrac{-2}{-10} = \dfrac{1}{5}$.

Comme $a=-5$, $a<0$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		6		$+\infty$
$-5x^2+31x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $-5x^2+31x-6 \geqslant 0 \iff x \in \left[\dfrac{1}{5}\ ;\ 6\right]$

donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \left[\dfrac{1}{5}\ ;\ 6\right]}$.

3) $\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{-x^2+26x-169}}$: $f(x)$ est bien définie $\iff x^2-2x+3 \geqslant 0$ et $-x^2+26x-169 \neq 0$.

* Trinôme x^2-2x+3 : on a $\Delta=-8$ donc $\Delta<0$ et le trinôme n'a pas de racine dans $\mathbf{R}$.

Comme $a=1$, $a>0$, donc le trinôme x^2-2x+3 est toujours strictement positif : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2-2x+3>0$.

* Trinôme $-x^2+26x-169$: on a $\Delta=0$ donc l'équation $-x^2+26x-169=0$ possède une unique solution :

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{26}{2\times(-1)} = \dfrac{-26}{-2} = 13$.

Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{13\} =]-\infty\ ;\ 13[\cup]13\ ;\ +\infty[}$.