Correction : raisonnement par récurrence

www.bossetesmaths.com

Exercice 1

$\forall n \in \mathbf{N}$, on note P_n la propriété : $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Initialisation : pour $n = 0$:

$3^{2\times 0} - 2^0 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 7 \times 0$ divisible par 7 donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que P_n est vraie, c'est-à-dire tel que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7. Ainsi il existe un entier (relatif) k tel que $3^{2n} - 2^n = 7k$, d'où $3^{2n} = 7k + 2^n$.

Montrons qu'alors P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^2 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 9 \times (7k + 2^n) - 2 \times 2^n = 9 \times 7k + 9 \times 2^n - 2 \times 2^n = 7 \times 9k + 7 \times 2^n$

$= 7(9k + 2^n)$ avec $9k + 2^n \in \mathbf{Z}$ donc $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 2

$\boxed{u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1}$.

$\forall n \in \mathbf{N}$, on note P_n la propriété : $u_n \geqslant n^2$.

Initialisation : pour $n = 0$:

$u_0 = 1$ et $0^2 = 0$; or $1 \geqslant 0$ donc $u_0 \geqslant 0^2$ et P_0 est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que P_n est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n \geqslant n^2$.

Montrons qu'alors P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

$u_n \geqslant n^2 \Rightarrow u_n + 2n + 1 \geqslant n^2 + 2n + 1 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant n^2$.

Exercice 3

$\boxed{u_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}}$.

$\forall n \in \mathbf{N}$, on note P_n la propriété : $2 \leqslant u_n < 3$.

Initialisation : pour $n = 0$:

$u_0 = 2$ donc $2 \leqslant u_0 < 3$ et P_0 est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que P_n est vraie, c'est-à-dire tel que $2 \leqslant u_n < 3$.

Montrons qu'alors P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $2 \leqslant u_{n+1} < 3$.

$2 \leqslant u_n < 3 \Rightarrow 7 \leqslant u_n + 5 < 8 \Rightarrow 2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant \sqrt{u_n + 5} < \sqrt{8} < 3$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$) $\Rightarrow 2 \leqslant u_{n+1} < 3$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $2 \leqslant u_n < 3$.

✎ Exercice 4

$\forall n \geqslant 1$, on note P_n la propriété : $1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Initialisation : pour $n=1$:

$1\times 2=2$ et $\dfrac{1\times(1+1)\times(1+2)}{3}=\dfrac{2\times\cancel{3}}{\cancel{3}}=2$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ tel que P_n est vraie,

c'est-à-dire tel que $1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Montrons qu'alors P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

$1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}+\dfrac{3(n+1)(n+2)}{3}$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n\geqslant 1$, $1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.