Correction : inéquation du second degré

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\boxed{-x^2-x+2 \leqslant 0}$

$a=-1$; $b=-1$; $c=2$. $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times(-1)\times 2 = 1+8 = 9$. $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$.

Le trinôme $-x^2-x+2$ possède deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-3}{2\times(-1)} = \dfrac{-2}{-2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+3}{-2} = \dfrac{4}{-2} = -2$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x^2-x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	$(a=-1)$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2-x+2 \leqslant 0$ est $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -2] \cup [1\ ;\ +\infty[}$.

b) $9x^2+49 \geqslant 42x \iff \boxed{9x^2-42x+49 \geqslant 0}$.

$a=9$; $b=-42$; $c=49$. $\Delta = b^2-4ac = (-42)^2-4\times 9\times 49 = 1764-1764 = 0$.

$\Delta = 0$ donc le trinôme $9x^2-42x+49$ possède une seule racine : $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{42}{2\times 9} = \dfrac{42}{18} = \dfrac{\cancel{6}\times 7}{\cancel{6}\times 3} = \dfrac{7}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$9x^2-42x+49$		$+$	0	$+$	$(a=9)$

Donc $\boxed{\mathscr{S} = \mathbf{R}}$.

Autre méthode : $9x^2-42x+49 \geqslant 0 \iff (3x-7)^2 \geqslant 0 \iff x \in \mathbf{R}$ donc $\boxed{\mathscr{S} = \mathbf{R}}$.

c) $\boxed{9x^2+8x-1 > 0}$

$a=9$; $b=8$; $c=-1$. $\Delta = b^2-4ac = 8^2-4\times 9\times(-1) = 64+36 = 100$. $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$.

Le trinôme $9x^2+8x-1$ possède deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-10}{2\times 9} = \dfrac{-18}{18} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+10}{18} = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{9}$		$+\infty$
$9x^2+8x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	$(a=9)$

Donc $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -1[\cup \left]\dfrac{1}{9}\ ;\ +\infty\right[}$.

d) $x^2 < 2x+3 \iff \boxed{x^2-2x-3 < 0}$.

$a=1$; $b=-2$; $c=-3$. $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times 1\times(-3) = 4+12 = 16$. $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$.

Le trinôme x^2-2x-3 possède deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{2\times 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	$(a=1)$

Donc $\boxed{\mathscr{S} =]-1\ ;\ 3[}$.

e) $20x^2+1 \leqslant 10x-5x^2 \iff 20x^2+1-10x+5x^2 \leqslant 0 \iff \boxed{25x^2-10x+1 \leqslant 0}$.

$a=25$; $b=-10$; $c=1$. $\Delta = b^2-4ac = (-10)^2-4\times 25\times 1 = 100-100 = 0$.

$\Delta = 0$ donc le trinôme $25x^2-10x+1$ possède une seule racine : $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{10}{2\times 25} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$25x^2-10x+1$		$+$	0	$+$	$(a=25)$

Donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{5}\right\}}$.

Autre méthode : $25x^2-10x+1\leqslant 0 \iff (5x-1)^2\leqslant 0 \iff 5x-1=0 \iff x=\frac{1}{5}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{5}\right\}}$.

f) $\boxed{-3x^2+4x-2\geqslant 0}$

$a=-3$; $b=4$; $c=-2$. $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-3)\times(-2)=16-24=-8$.

$\Delta<0$ donc le trinôme $-3x^2+4x-2$ ne possède pas de racine dans $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x^2+4x-2$		$-$	$(a=-3)$

Donc $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$.

g) $-4x-1<5x^2 \iff \boxed{-5x^2-4x-1<0}$.

$a=-5$; $b=-4$; $c=-1$. $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times(-5)\times(-1)=16-20=-4$.

$\Delta<0$ donc le trinôme $-5x^2-4x-1$ ne possède pas de racine dans $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-5x^2-4x-1$		$-$	$(a=-5)$

Donc $\boxed{\mathscr{S}=\mathbf{R}}$.

h) $\boxed{3x^2-x-2<0}$

$a=3$; $b=-1$; $c=-2$. $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times 3\times(-2)=1+24=25$. $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$.

Le trinôme $3x^2-x-2$ possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-5}{2\times 3}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+5}{6}=\frac{6}{6}=1$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	$(a=3)$

Donc $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\frac{2}{3}\ ;\ 1\right[}$.