Correction : produit scalaire de deux vecteurs

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1

• **Situation 1 :**

On a $A(-2\ ;\ 1)$, $B(0\ ;\ -3)$ et $C(2\ ;\ 2)$.

Ainsi : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0+2\\-3-1\end{pmatrix}$; $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2+2\\2-1\end{pmatrix}$; $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}}$.

Alors : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=2\times4-4\times1=8-4=\boxed{4}$.

• **Situation 2 :** $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AC}||\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=AB\times AC\times\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=3\times3\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=9\times\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=9\times(-0,5)=\boxed{-4,5}$.

• **Situation 3 :** Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{AB}$ donc :

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=2^2=\boxed{4}$.

✎ Exercice 2

$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\,.\,\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{AD}$.

Calculons ces 4 produits scalaires :

* On a : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\,.\,\left(-\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}^2=-AB^2=-5^2=-25$;

* Comme $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}=0$;

* Comme $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BA}$ alors $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA}=0$;

* Enfin : $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=BC^2=3^2=9$.

Ainsi : $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD}=-25+0+0+9=-25+9=\boxed{-16}$.

✎ Exercice 3

$\boxed{AB=5,\ BC=4 \text{ et } AC=7}$.

1) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||^2+||\overrightarrow{AC}||^2-||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}||^2\right)$.

Or : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$ donc $||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}||=||\overrightarrow{CB}||=CB=BC$.

Ainsi : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=\dfrac{1}{2}(5^2+7^2-4^2)=\dfrac{1}{2}(25+49-16)=\dfrac{1}{2}\times58=\boxed{26}$.

2) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AC}||\times\cos\widehat{BAC}\iff 26=5\times7\times\cos\widehat{BAC}\iff 26=35\cos\widehat{BAC}\iff\cos\widehat{BAC}=\dfrac{26}{35}$.

Alors : $\widehat{BAC}=\text{Arccos}\left(\dfrac{26}{35}\right)\approx\boxed{42°}$.

Attention à mettre sa calculatrice en Mode "Degrés" pour faire le calcul $\text{Arccos}\left(\dfrac{26}{35}\right)$.

✎ Exercice 4

$\boxed{AB = 6, BC = 4 \text{ et } \left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\pi}{3}}$.

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = ||\overrightarrow{BA}|| \times ||\overrightarrow{BC}|| \times \cos\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right) = AB \times BC \times \cos\dfrac{\pi}{3} = 6 \times 4 \times 0,5 = \boxed{12}$.

2) $AC^2 = \overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + BC^2 = 6^2 - 2 \times 12 + 4^2$

$AC^2 = 36 - 24 + 16 = 28$. Donc $AC = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \boxed{2\sqrt{7}}$.

3) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{CA}||^2 + ||\overrightarrow{CB}||^2 - ||\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}||^2\right)$.

Or : $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ donc $||\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|| = ||\overrightarrow{BA}|| = BA = AB$.

Ainsi : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}\left(AC^2 + BC^2 - AB^2\right) = \dfrac{1}{2}(28 + 4^2 - 6^2) = \dfrac{1}{2}(28 + 16 - 36) = \dfrac{1}{2} \times 8 = \boxed{4}$.

4) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = ||\overrightarrow{CA}|| \times ||\overrightarrow{CB}|| \times \cos\widehat{ACB} \iff 4 = 2\sqrt{7} \times 4 \times \cos\widehat{ACB} \iff 1 = 2\sqrt{7}\cos\widehat{ACB}$

$\iff \cos\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Alors : $\widehat{ACB} = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\right) \approx \boxed{79,11°}$.

Attention à mettre sa calculatrice en Mode "Degrés" pour faire le calcul $\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\right)$.