Exercices : théorème des valeurs intermédiaires

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1 (Bac S - Nouvelle Calédonie nov. 2013)

Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 e^x - 1$.

1) Etudier le sens de variation de la fonction g.

2) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

3) Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703\ ;\ 0,704]$.

4) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

✎ Exercice 2 (Bac S - France juin 2013)

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$. On admettra que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

✎ Exercice 3 (Bac S - Nouvelle Calédonie nov. 2012)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.
On admettra que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.

3) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;\,15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

✎ Exercice 4 (Bac ES - Liban mai 2013)

On considère la fonction f définie sur $[5\,;\,60]$ par $f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20$.

1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5\,;\,60]$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5\,;\,60]$.

3) Donner un encadrement à l'unité de α.

4) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5\,;\,60]$.

✎ Exercice 5 (Bac ES - France juin 2013)

On considère la fonction B définie sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 3,6]$ par $B(x) = -5 + (4 - x)e^x$.

1) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I, on a : $B'(x) = (3 - x)e^x$.

b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.

2) a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0\ ;\ 3]$, l'autre dans l'intervalle $[3\ ;\ 3,6]$.

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à $0,01$ près de chacune des deux solutions.