Correction : théorème des valeurs intermédiaires

www.bossetesmaths.com

Exercice 1 (Bac S - Nouvelle Calédonie nov. 2013)

$\boxed{g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1 \text{ sur } [0\ ;\ +\infty[}$.

1) Pour tout réel $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (2x + x^2)\mathrm{e}^x = (2+x)x\mathrm{e}^x$.

Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $2 + x > 0$; $x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, donc $g'(x) \geqslant 0$. Donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0\ ;\ +\infty[}$.

2) * $g(0) = 0^2\mathrm{e}^0 - 1 = 0 - 1 = -1$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x = +\infty$ et en soustrayant 1 on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

x	0		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction g est dérivable donc continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

- On a $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc $0 \in [g(0)\ ;\ +\infty[$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \text{ appartenant à } [0\ ;\ +\infty[\text{ tel que } g(\alpha) = 0}$.

3) On obtient avec la calculatrice :

x	$0,703$	$0,704$
$g(x)$	$-0,0018$	$0,00205$

donc $\boxed{\alpha \text{ appartient à l'intervalle } [0,703\ ;\ 0,704]}$.

4) On en déduit le tableau de signes de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 2 (Bac S - France juin 2013)

$\boxed{f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x} \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[}$. On admet que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2 + 2\ln x$ et $v(x) = x$. $u'(x) = 0 + 2 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$ et $v'(x) = 1$.

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{\cancel{x}} \times \cancel{x} - (2 + 2\ln x) \times 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
-2	||	$-$		$-$	
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Signe de f' :

* $-2 > 0$;

* $\ln x > 0 \iff x > \mathrm{e}^0 \iff x > 1$;

* $x^2 > 0$ pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$.

* D'après l'énoncé, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

* $f(1) = \dfrac{2 + 2\ln 1}{1} = 2 + 2 \times 0 = 2$.

2) - La fonction f est dérivable donc continue et strictement croissante sur $]0\ ;\ 1]$.

- On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$ donc $1 \in]-\infty\ ;\ f(1)]$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 1 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur l'intervalle }]0\ ;\ 1]}$

✎ Exercice 3 (Bac S - Nouvelle Calédonie nov. 2012)

$\boxed{f(x) = 5\ln(x+3) - x \text{ sur } [0\ ;\ +\infty[}$. On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

1) Posons $g(x) = \ln(x+3)$. Alors $g = \ln u$ avec $u(x) = x+3$ et $u'(x) = 1$.

$g' = \dfrac{u'}{u}$ donc, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

$f(x) = 5g(x) - x$ donc, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 5g'(x) - 1 = 5 \times \dfrac{1}{x+3} - 1 = \dfrac{5}{x+3} - \dfrac{x+3}{x+3} = \dfrac{5-x-3}{x+3} = \dfrac{2-x}{x+3}$.

x	0		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	$(a=-1)$
$x+3$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln 5 - 2$	$\searrow$	$-\infty$

Signe de f' :

* $x+3 > 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$.

* $2 - x = 0 \iff 2 = x \iff x = 2$.

* $f(0) = 5\ln(0+3) - 0 = 5\ln 3$.

* $f(2) = 5\ln(2+3) - 2 = 5\ln 5 - 2$.

* D'après l'énoncé, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2) - La fonction f est dérivable donc continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ 2]$.

- On a $f(0) = 5\ln 3 \approx 5{,}49$ et $f(2) = 5\ln 5 - 2 \approx 6{,}05$ donc $0 \notin [f(0)\ ;\ f(2)]$.

Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ n'admet pas de solution dans } [0\ ;\ 2]}$.

De plus :

- La fonction f est dérivable donc continue et strictement décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

- On a $f(2) = 5\ln 5 - 2 \approx 6{,}05$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ donc $0 \in]-\infty\ ;\ f(2)]$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } [2\ ;\ +\infty[}$.

Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur l'intervalle } [0\ ;\ +\infty[\text{ (avec } \alpha \in [2\ ;\ +\infty[)}$.

3) On obtient avec la calculatrice :

x	14	15
$f(x)$	$0{,}16607$	$-0{,}5481$

donc $\boxed{\alpha \text{ appartient à l'intervalle } [14\ ;\ 15]}$.

Avec un pas de $0{,}01$:

x	$14{,}23$	$14{,}24$
$f(x)$	$0{,}00326$	$-0{,}0038$

donc $\boxed{\alpha \approx 14{,}23 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

4) On en déduit le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

✎ Exercice 4 (Bac ES - Liban mai 2013)

$\boxed{f(x) = 0{,}1xe^{0{,}1x} - e^{0{,}1x} - 20 \text{ sur } [5\,;\,60]}$.

1) Posons $g(x) = e^{0{,}1x}$. Alors $g = e^u$ avec $u(x) = 0{,}1x$ et $u'(x) = 0{,}1$.

$g' = u'e^u$ donc, pour tout $x \in [5\ ;\ 60]$, $g'(x) = 0{,}1e^{0{,}1x}$.

Ainsi, pour tout $x \in [5\ ;\ 60]$, $f(x) = 0{,}1x \times g(x) - g(x) - 20$ donc $f'(x) = 0{,}1 \times g(x) + 0{,}1x \times g'(x) - g'(x)$

$f'(x) = 0{,}1e^{0{,}1x} + 0{,}1x \times 0{,}1e^{0{,}1x} - 0{,}1e^{0{,}1x} = (0{,}1 + 0{,}01x - 0{,}1)e^{0{,}1x} = 0{,}01xe^{0{,}1x}$.

Pour tout $x \in [5\ ;\ 60]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [5\,;\,60]}$.

2) * $f(5) = 0{,}1 \times 5e^{0{,}1\times5} - e^{0{,}1\times5} - 20 = 0{,}5e^{0{,}5} - e^{0{,}5} - 20 = (0{,}5-1)e^{0{,}5} - 20 = -0{,}5e^{0{,}5} - 20$.

* $f(60) = 0{,}1 \times 60e^{0{,}1\times60} - e^{0{,}1\times60} - 20 = 6e^6 - e^6 - 20 = (6-1)e^6 - 20 = 5e^6 - 20$.

x	5		60
$f(x)$	$-0,5e^{0,5}-20$	$\nearrow$	$5e^6-20$

- La fonction f est dérivable donc continue et strictement croissante sur $[5\ ;\ 60]$.
- On a $f(5) = -0,5e^{0,5} - 20 < 0$ et $f(60) = 5e^6 - 20 \approx 1997,14$ donc $0 \in [f(5)\ ;\ f(60)]$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ possède une unique solution } \alpha \text{ dans } [5\,;\,60]}$.

3) On obtient avec la calculatrice :

x	25	26
$f(x)$	$-1,726$	$1,542$

donc $\boxed{25 < \alpha < 26 \text{ à l'unité près}}$.

4) On en déduit le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5\ ;\ 60]$:

x	5		α		60
$f(x)$		$-$	0	$+$	

✎ Exercice 5 (Bac ES - France juin 2013)

$\boxed{B(x) = -5 + (4 - x)e^x \text{ sur l'intervalle } I = [0\ ;\ 3,6]}$.

1) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I, on a : $B'(x) = 0 + (-1)e^x + (4 - x)e^x = (-1 + 4 - x)e^x = (3 - x)e^x$.

b) * $3 - x = 0 \iff 3 = x \iff x = 3$.

* Pour tout $x \in I$, $e^x > 0$.

x	0		3		$3,6$
$3-x$		$+$	0	$-$	$(a=-1)$
e^x		$+$		$+$	
$B'(x)$		$+$	0	$-$	

c) On en déduit le tableau tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle I :

x	0		3		$3,6$
$B(x)$	-1	$\nearrow$	$-5+e^3$	$\searrow$	$-5+0,4e^{3,6}$

* $B(0) = -5 + (4 - 0)e^0 = -5 + 4 \times 1 = -5 + 4 = -1$.
* $B(3) = -5 + (4 - 3)e^3 = -5 + e^3$.
* $B(3,6) = -5 + (4 - 3,6)e^{3,6} = -5 + 0,4e^{3,6}$.

2) a) - La fonction B est dérivable donc continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ 3]$.

- On a $B(0) = -1$ et $B(3) = -5 + e^3 \approx 15,09$ donc $13 \in [B(0)\ ;\ B(3)]$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, $\boxed{\text{l'équation } B(x) = 13 \text{ possède une unique solution } x_1 \text{ dans } [0\ ;\ 3]}$.

De plus :

- La fonction B est dérivable donc continue et strictement décroissante sur $[3\ ;\ 3,6]$.
- On a $B(3) = -5 + e^3 \approx 15,09$ et $B(3,6) = -5 + 0,4e^{3,6} \approx 9,64$ donc $13 \in [B(3,6)\ ;\ B(3)]$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, $\boxed{\text{l'équation } B(x) = 13 \text{ possède une unique solution } x_2 \text{ dans } [3\ ;\ 3,6]}$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{l'équation } B(x) = 13 \text{ possède deux solutions } x_1 \text{ et } x_2 \text{ dans } I \text{ (avec } x_1 \in [0\ ;\ 3] \text{ et } x_2 \in [3\ ;\ 3,6]}$.

b) On obtient avec la calculatrice :

x	$2,45$	$2,46$
$B(x)$	$12,962$	$13,025$

donc $\boxed{x_1 \approx 2,46 \text{ à } 0,01 \text{ près}}$.

x	$3,39$	$3,4$
$B(x)$	$13,096$	$12,978$

donc $\boxed{x_1 \approx 3,4 \text{ à } 0,01 \text{ près}}$.