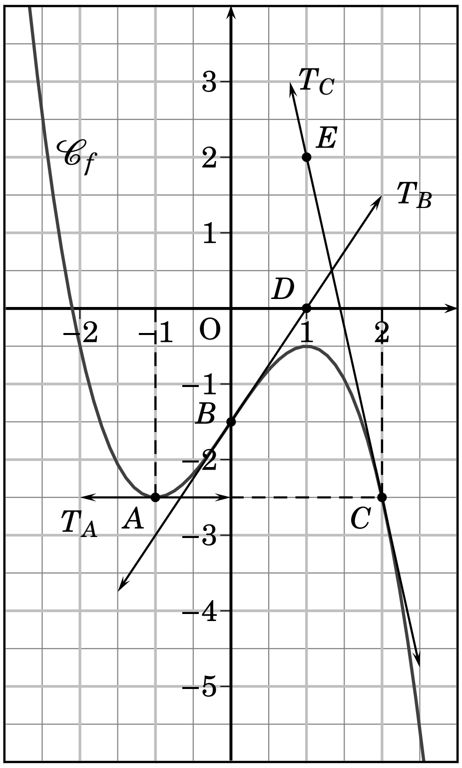
Correction : tangente à une courbe

www.bossetesmaths.com

Exercice 1 (Graphique)



1) Tableau :

$f(-1)$	$f(0)$	$f(2)$
−2,5	**−1,5**	**−2,5**
$f'(-1)$	$f'(0)$	$f'(2)$
0	**1,5**	**−4,5**

* Graphiquement, on peut lire que :

$f(-1)$ est l'ordonnée du point A donc $\boxed{f(-1)=-2,5}$;

$f(0)$ est l'ordonnée du point B donc $\boxed{f(0)=-1,5}$;

$f(2)$ est l'ordonnée du point C donc $\boxed{f(2)=-2,5}$.

* $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A ; or cette tangente est horizontale donc $f'(-1)=\boxed{0}$.

* $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T_B.

$B(0\ ;\ -1,5)\in T_B$ et $D(1\ ;\ 0)\in T_B$.

Alors $f'(0)=\dfrac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\dfrac{0-(-1,5)}{1-0}=\dfrac{1,5}{1}=\boxed{1,5}$.

* $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente T_C.

$C(2\ ;\ -2,5)\in T_C$ et $E(1\ ;\ 2)\in T_C$.

Alors $f'(2)=\dfrac{y_E-y_C}{x_E-x_C}=\dfrac{2-(-2,5)}{1-2}=\dfrac{4,5}{-1}=\boxed{-4,5}$.

2) * $T_A : y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1) \iff T_A : y=0\times(x+1)-2,5 \iff y=0-2,5 \iff \boxed{T_A : y=-2,5}$.

* $T_B : y=f'(0)(x-0)+f(0) \iff T_B : y=1,5\times x-1,5 \iff \boxed{T_B : y=1,5x-1,5}$.

* $T_C : y=f'(2)(x-2)+f(2) \iff T_C : y=-4,5\times(x-2)-2,5 \iff T_C : y=-4,5x+9-2,5 \iff \boxed{T_C : y=-4,5x+6,5}$.

Exercice 2 (Calculs)

1) $\boxed{f(x)=2x^5-3x+4}$; $I=\mathbb{R}$; $a=-1$.

$T : y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1) \iff T : y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$.

* $f(-1)=2\times(-1)^5-3\times(-1)+4=2\times(-1)+3+4=-2+7=5$.

* Pour tout $x\in I$, $f'(x)=2\times5x^4-3\times1+0=10x^4-3$ donc $f'(-1)=10\times(-1)^4-3=10\times1-3=10-3=7$.

* Alors $T : y=7(x+1)+5 \iff T : y=7x+7+5 \iff \boxed{T : y=7x+12}$.

2) $\boxed{f(x)=\dfrac{3}{x}-1}$; $I=]0\ ;\ +\infty[$; $a=2$.

$T : y=f'(2)(x-2)+f(2)$.

* $f(2)=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{2}$.

* Pour tout $x\in I$, $f'(x)=3\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)-0=-\dfrac{3}{x^2}$ donc $f'(2)=-\dfrac{3}{2^2}=-\dfrac{3}{4}$.

* Alors $T : y=-\dfrac{3}{4}(x-2)+\dfrac{1}{2} \iff T : y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{6}{4}+\dfrac{1}{2} \iff T : y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2} \iff T : y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{4}{2}$

$\iff \boxed{T : y=-\dfrac{3}{4}x+2}$.

3) $\boxed{f(x)=3-4\sqrt{x}}$; $I=]0~;~+\infty[$; $a=16$.

$T: y=f'(16)(x-16)+f(16)$.

* $f(16)=3-4\sqrt{16}=3-4\times 4=3-16=-13$.

* Pour tout $x\in I$, $f'(x)=0-4\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{4}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ donc $f'(16)=-\dfrac{2}{\sqrt{16}}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

* Alors $T: y=-\dfrac{1}{2}(x-16)-13 \iff T: y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{16}{2}-13 \iff T: y=-\dfrac{1}{2}x+8-13 \iff \boxed{T: y=-\dfrac{1}{2}x-5}$.

4) $\boxed{f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x-1}$; $I=\mathbb{R}$; $a=-2$.

$T: y=f'(-2)(x-(-2))+f(-2) \iff T: y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$.

* $f(-2)=-\dfrac{3}{2}\times(-2)^2+\dfrac{1}{3}\times(-2)-1=-\dfrac{3}{2}\times 4-\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{3}=-\dfrac{12}{2}-\dfrac{5}{3}=-6-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{18}{3}-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{23}{3}$.

* Pour tout $x\in I$, $f'(x)=-\dfrac{3}{\cancel{2}}\times\cancel{2}x+\dfrac{1}{3}\times 1-0=-3x+\dfrac{1}{3}$ donc $f'(-2)=-3\times(-2)+\dfrac{1}{3}=6+\dfrac{1}{3}=\dfrac{18}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{3}$.

* Alors $T: y=\dfrac{19}{3}(x+2)-\dfrac{23}{3} \iff T: y=\dfrac{19}{3}x+\dfrac{38}{3}-\dfrac{23}{3} \iff T: y=\dfrac{19}{3}x+\dfrac{15}{3} \iff \boxed{T: y=\dfrac{19}{3}x+5}$.

✎ Exercice 3

g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3x^2-4x-2$.

1) Tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ de g au point A d'abscisse -1 :

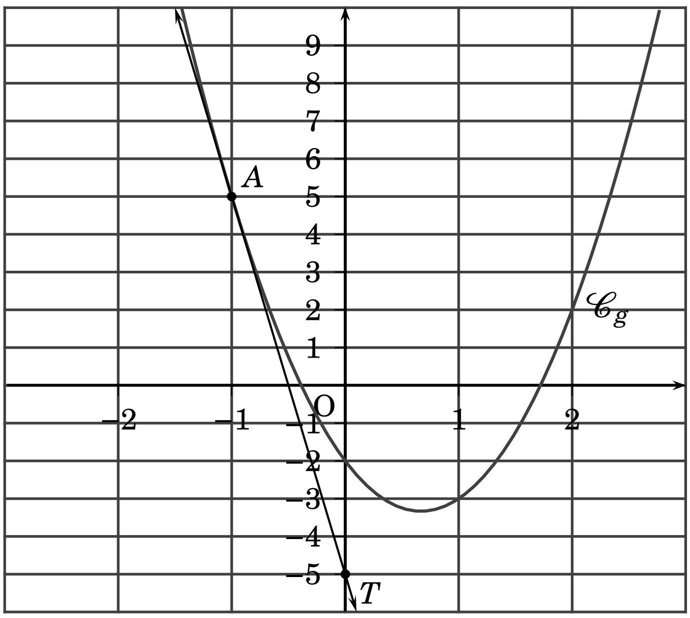
$T: y=g'(-1)(x-(-1))+g(-1) \iff T: y=g'(-1)(x+1)+g(-1)$.

* $g(-1)=3\times(-1)^2-4\times(-1)-2=3\times 1+4-2=3+2=5$.

* Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=3\times 2x-4\times 1-0=6x-4$ donc $g'(-1)=6\times(-1)-4=-6-4=-10$.

* Alors $T: y=-10(x+1)+5 \iff T: y=-10x-10+5 \iff \boxed{T: y=-10x-5}$.

2) Pour représenter graphiquement la tangente T, on fait un tableau de 2 valeurs :



$T: y=-10x-5$:

x	-1	0
y	5	-5

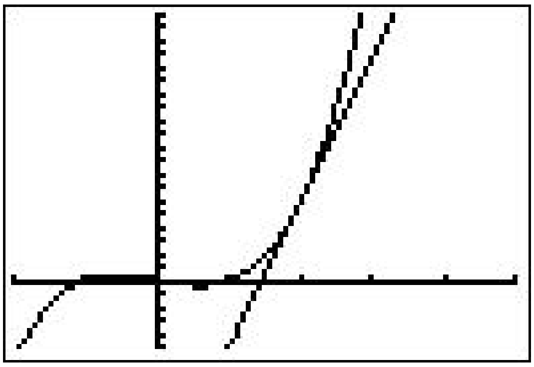
Si $x=-1$, alors $y=-10\times(-1)-5=10-5=5$;

Si $x=0$, alors $y=-10\times 0-5=0-5=-5$.

Ainsi la tangente T passe par les points de coordonnées $(-1~;~5)$ et $(0~;~-5)$.

✎ Exercice 4

f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x$ et droite $d : y = 11x - 16$.



1) D'après les graduations sur l'écran de calculatrice, il semblerait que la droite d soit tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2. Vérifions-le en cherchant l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

$T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

* $f(2) = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$.

* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 1$ donc $f'(2) = 3 \times 2^2 - 1 = 3 \times 4 - 1 = 12 - 1 = 11$.

* Alors $T : y = 11(x-2) + 6 = 11x - 22 + 6 = 11x - 16$.

On constate que les droites d et T ont la même équation réduite, elles sont donc confondues.

Ainsi la droite d est bien la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(2\ ;\ f(2))$ c'est-à-dire au point $A(2\ ;\ 6)$.

2) On sait que 2 droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Le coefficient directeur de la droite d d'équation $y = 11x - 16$ est 11.

Le coefficient directeur de la tangente T' à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est $f'(a)$.

Ainsi T' est parallèle à $d \iff f'(a) = 11 \iff 3a^2 - 1 = 11 \iff 3a^2 = 11 + 1$

$\iff 3a^2 = 12 \iff a^2 = \dfrac{12}{3} \iff a^2 = 4 \iff a = -2$ ou $a = 2$.

Ainsi la tangente T' à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 est tangente à la droite d (qui est la tangente au point d'abscisse 2).

Equation réduite de T' :

$T' : y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) \iff T' : y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$.

* $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -8 + 2 = -6$.

* $f'(-2) = 11$.

* Ainsi $T' : y = 11(x+2) - 6 \iff T' : y = 11x + 22 - 6 \iff \boxed{T' : y = 11x + 16}$.