Correction : équation d'un cercle

www.bossetesmaths.com

Exercice 1 (Equation avec centre et rayon)

a) $\boxed{I(-2\ ;\ 5) \text{ et } R=3}$.

$\mathscr{C} : (x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2 \iff (x-(-2))^2+(y-5)^2=3^2 \iff \boxed{(x+2)^2+(y-5)^2=9}$.

On a : $(x_O+2)^2+(y_O-5)^2=(0+2)^2+(0-5)^2=2^2+(-5)^2=4+25=29\neq 9$ donc $\boxed{O\notin\mathscr{C}}$.

b) $\boxed{I(3\ ;\ -1) \text{ et } R=\sqrt{10}}$.

$\mathscr{C} : (x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2 \iff (x-3)^2+(y-(-1))^2=\sqrt{10}^2 \iff \boxed{(x-3)^2+(y+1)^2=10}$.

On a : $(x_O-3)^2+(y_O+1)^2=(0-3)^2+(0+1)^2=(-3)^2+1^2=9+1=10$ donc $\boxed{O\in\mathscr{C}}$.

c) $\boxed{I\left(-4\ ;\ -\frac{1}{3}\right) \text{ et } R=2}$.

$\mathscr{C} : (x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2 \iff (x-(-4))^2+\left(y-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2=2^2 \iff \boxed{(x+4)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=4}$.

On a : $(x_O+4)^2+\left(y_O+\frac{1}{3}\right)^2=(0+4)^2+\left(0+\frac{1}{3}\right)^2=4^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=16+\frac{1}{9}=\frac{144}{9}+\frac{1}{9}=\frac{145}{9}\neq 4$ donc $\boxed{O\notin\mathscr{C}}$.

Exercice 2 (Equation sous forme développée)

a) $\mathscr{E} : x^2+y^2-6x-8y=0 \iff x^2-6x+y^2-8y=0 \iff (x-3)^2-9+(y-4)^2-16=0$
$\iff (x-3)^2+(y-4)^2=9+16 \iff (x-3)^2+(y-4)^2=25 \iff (x-3)^2+(y-4)^2=5^2$.

Ainsi $\boxed{\mathscr{E} \text{ est le cercle de centre } I(3\ ;\ 4) \text{ et de rayon } 5}$.

b) $\mathscr{E} : x^2+y^2+10x-6y+14=0 \iff x^2+10x+y^2-6y+14=0 \iff (x+5)^2-25+(y-3)^2-9+14=0$
$\iff (x+5)^2+(y-3)^2=25+9-14 \iff (x+5)^2+(y-3)^2=20 \iff (x+5)^2+(y-3)^2=\sqrt{20}^2$
$\iff (x+5)^2+(y-3)^2=\sqrt{4\times5}^2 \iff (x-(-5))^2+(y-3)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$.

Ainsi $\boxed{\mathscr{E} \text{ est le cercle de centre } I(-5\ ;\ 3) \text{ et de rayon } 2\sqrt{5}}$.

c) $\mathscr{E} : x^2+y^2-5x+4=0 \iff x^2-5x+y^2+4=0 \iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+(y-0)^2+4=0$
$\iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-0)^2=\frac{25}{4}+4 \iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-0)^2=\frac{25}{4}+\frac{16}{4} \iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-0)^2=\frac{31}{4}$
$\iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-0)^2=\left(\frac{\sqrt{31}}{2}\right)^2$. Ainsi $\boxed{\mathscr{E} \text{ est le cercle de centre } I\left(\frac{5}{2}\ ;\ 0\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{31}}{2}}$.

Exercice 3 (Ensemble de points)

a) $\mathscr{F} : x^2+y^2=0 \iff x^2=0$ et $y^2=0$ (en effet, une somme de deux carrés est nulle si et seulement si les deux carrés sont nuls) $\iff x=0$ et $y=0$.

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble } \mathscr{F} \text{ est constitué uniquement du point } O \text{ de coordonnées } (0\ ;\ 0) \text{ soit } \mathscr{F}=\{O\}}$.

b) $\mathscr{F} : x^2+y^2+6x-4y+13=0 \iff x^2+6x+y^2-4y+13=0 \iff (x+3)^2-9+(y-2)^2-4+13=0$
$\iff (x+3)^2+(y-2)^2=9+4-13 \iff (x+3)^2+(y-2)^2=0 \iff (x+3)^2=0$ et $(y-2)^2=0$ (car une somme

de deux carrés est nulle si et seulement si les deux carrés sont nuls) $\iff x+3=0$ et $y-2=0$
$\iff x=-3$ et $y=2$.

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble } \mathscr{F} \text{ est constitué uniquement du point } K \text{ de coordonnées } (-3\ ;\ 2) \text{ soit } \mathscr{F}=\{K\}}$.

c) $\mathscr{F} : x^2+y^2-3x+y+3=0 \iff x^2-3x+y^2+y+3=0 \iff \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+3=0$
$\iff \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}-3 \iff \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{10}{4}-\dfrac{12}{4} \iff \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{2}{4}$
$\iff \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{1}{2}$. Ceci est impossible car un carré est toujours positif ou nul (donc une somme de deux carrés aussi).

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble } \mathscr{F} \text{ est l'ensemble vide soit } \mathscr{F}=\emptyset}$.

✎ Exercice 4 (Equation avec diamètre)

a) $\boxed{A(-3\ ;\ 2) \text{ et } B(-1\ ;\ -2)}$.

$M\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{BM}=0$. Si on pose $M(x\ ;\ y)$, alors :
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-3)\\y-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x_M-x_B\\y_M-y_B\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-(-2)\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+1\\y+2\end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{BM}=(x+3)(x+1)+(y-2)(y+2)=x^2+x+3x+3+y^2-4=x^2+y^2+4x-1$.

Ainsi $\boxed{\mathscr{C} : x^2+y^2+4x-1=0}$.

Avec $K(-1\ ;\ 3)$, on a : $x_K^2+y_K^2+4x_K-1=(-1)^2+3^2+4\times(-1)-1=1+9-4-1=5\neq 0$ donc $\boxed{K\notin\mathscr{C}}$.

b) $\boxed{A(-1\ ;\ 5) \text{ et } B(2\ ;\ 3)}$.

$M\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{BM}=0$. Si on pose $M(x\ ;\ y)$, alors :
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x_M-x_B\\y_M-y_B\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{BM}=(x+1)(x-2)+(y-5)(y-3)=x^2-2x+x-2+y^2-3y-5y+15=x^2+y^2-x-8y+13$.

Ainsi $\boxed{\mathscr{C} : x^2+y^2-x-8y+13=0}$.

Avec $K(-1\ ;\ 3)$, on a : $x_K^2+y_K^2-x_K-8y_K+13=(-1)^2+3^2-(-1)-8\times 3+13=1+9+1-24+13=0$ donc $\boxed{K\in\mathscr{C}}$.

c) $\boxed{A\left(5\ ;\ \dfrac{2}{3}\right) \text{ et } B(4\ ;\ -3)}$.

$M\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{BM}=0$. Si on pose $M(x\ ;\ y)$, alors :
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x_M-x_B\\y_M-y_B\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y-(-3)\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y+3\end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{BM}=(x-5)(x-4)+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)(y+3)=x^2-4x-5x+20+y^2+3y-\dfrac{2}{3}y-\dfrac{2}{\cancel{3}}\times\cancel{3}$
$=x^2+y^2-9x+\dfrac{9}{3}y-\dfrac{2}{3}y+20-2=x^2+y^2-9x+\dfrac{7}{3}y+18$.

Ainsi $\boxed{\mathscr{C} : x^2+y^2-9x+\dfrac{7}{3}y+18=0}$.

Avec $K(-1\ ;\ 3)$, on a : $x_K^2+y_K^2-9x_K+\dfrac{7}{3}y_K+18=(-1)^2+3^2-9\times(-1)+\dfrac{7}{\cancel{3}}\times\cancel{3}+18=1+9+9+7+18=44\neq 0$ donc $\boxed{K\notin\mathscr{C}}$.