Correction : équation cartésienne d'une droite

www.bossetesmaths.com

Exercice 1

	Point A	Point B	Coefficient directeur m de (AB)	Vecteur directeur $\vec{u}$ de (AB)	Equation réduite de (AB)	Equation cartésienne de (AB)
d_1	$(-2\ ;\ 6)$	$(5\ ;\ -1)$	-1	$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$	$y=-x+4$	$y=x+y-4=0$
d_2	$(3\ ;\ -1)$	$(-1\ ;\ 2)$	$m=-\frac{3}{4}$	$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$	$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$	$-3x-4y+5=0$
d_3	$(-3\ ;\ -5)$	$(0\ ;\ 1)$	2	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$y=2x+1$	$2x-y+1=0$
d_4	$(5\ ;\ 0)$	$(-5\ ;\ -8)$	$\frac{4}{5}$	$\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$	$y=\frac{4}{5}x-4$	$-4x+5y+20=0$
d_5	$(0\ ;\ -1)$	$(-2\ ;\ 5)$	-3	$\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$	$y=-3x-1$	$3x+y+1=0$

• Droite d_1 :

d_1 passe par les points $A(-2\ ;\ 6)$ et $B(5\ ;\ -1)$ donc $\boxed{m}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-1-6}{5-(-2)}=\dfrac{-7}{7}\boxed{=-1}$.

Donc le vecteur $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de d_1.

Comme $m=-1$ est le coefficient directeur de la droite d_1, alors $d_1 : y=-1x+p \iff d_1 : y=-x+p$.

Or $A(-2\ ;\ 6)\in d_1$ donc $y_A=-x_A+p \iff 6=-(-2)+p \iff 6=2+p \iff p=6-2 \iff p=4$.

Donc $\boxed{d_1 : y=-x+4}$.

Enfin, $d_1 : y=-x+4 \iff \boxed{d_1 : x+y-4=0}$.

• Droite d_2 :

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2 donc $d_2 : -3x-4y+c=0$.

Or $B(-1\ ;\ 2)\in d_2$ donc $-3x_B-4y_B+c=0 \iff -3\times(-1)-4\times 2+c=0 \iff 3-8+c=0 \iff -5+c=0 \iff c=5$.

Donc $\boxed{d_2 : -3x-4y+5=0}$.

De plus, $-3x-4y+5=0 \iff -3x+5=4y \iff y=\dfrac{-3x+5}{4} \iff \boxed{y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}}$.

On déduit de cette équation réduite que le coefficient directeur de d_2 est $\boxed{m=-\dfrac{3}{4}}$.

Enfin, si on prend $x=3$ dans l'équation réduite, alors $y=-\dfrac{3}{4}\times 3+\dfrac{5}{4}=-\dfrac{9}{4}+\dfrac{5}{4}=-\dfrac{4}{4}=-1$ donc le point $\boxed{A(3\ ;\ -1)}$ appartient à d_2.

• Droite d_3 :

Le coefficient directeur de d_3 est $m=2$, donc le vecteur $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de d_3 et $d_3 : y=2x+p$.

Or $A(-3\ ;\ -5)\in d_3$ donc $y_A=2x_A+p \iff -5=2\times(-3)+p \iff -5=-6+p \iff p=-5+6 \iff p=1$.

Donc $\boxed{d_3 : y=2x+1}$.

De plus, $y=2x+1 \iff \boxed{2x-y+1=0}$.

Enfin, si l'on prend $x=0$ dans l'équation réduite, alors $y=2\times 0+1=0+1=1$ donc le point $\boxed{B(0\ ;\ 1)}$ appartient à d_3.

• Droite d_4 :

La droite d_4 a pour équation cartésienne $-4x+5y+20=0 \iff 5y=4x-20 \iff y=\dfrac{4x-20}{5} \iff y=\dfrac{4}{5}x-\dfrac{20}{5}$

$\iff \boxed{y = \dfrac{4}{5}x - 4}$.

Donc le coefficient directeur de la droite d_4 est $\boxed{m = \dfrac{4}{5}}$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{4}{5}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_4 donc le vecteur $\vec{u} = 5\vec{v}$ (qui lui est colinéaire) est aussi un vecteur directeur de d_4 : $\vec{u}\begin{pmatrix}5\times 1\\ \cancel{5}\times\dfrac{4}{\cancel{5}}\end{pmatrix}$ soit $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}}$.

Si l'on prend $x = 5$ dans l'équation réduite, alors $y = \dfrac{4}{\cancel{5}} \times \cancel{5} - 4 = 4 - 4 = 0$ donc le point $\boxed{A(5\ ;\ 0)} \in d_4$.

De même, si l'on prend $x = -5$ dans l'équation réduite, alors $y = \dfrac{4}{\cancel{5}} \times (-\cancel{5}) - 4 = -4 - 4 = -8$

donc le point $\boxed{B(-5\ ;\ -8)} \in d_4$.

• <u>Droite d_5</u> :

La droite d_5 a pour équation réduite $y = -3x - 1$ donc son coefficient directeur $\boxed{m = -3}$ et le vecteur $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de d_5.

De plus, $y = -3x - 1 \iff \boxed{3x + y + 1 = 0}$.

Si l'on prend $x = 0$ dans l'équation réduite, alors $y = -3 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$ donc le point $\boxed{A(0\ ;\ -1)} \in d_5$.

De même, si l'on prend $x = -2$ dans l'équation réduite, alors $y = -3 \times (-2) - 1 = 6 - 1 = 5$ donc le point $\boxed{B(-2\ ;\ 5)} \in d_5$.

✎ Exercice 2

1) $\boxed{d \text{ est parallèle à la droite } (AB) \text{ où } A(-3\ ;\ 4) \text{ et } B(-1\ ;\ -2) \text{ et passe par le point } C(2\ ;\ -2)}$.

Le coefficient directeur m de la droite (AB) est donné par : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-4}{-1-(-3)} = \dfrac{-6}{2} = -3$.

La droite d étant parallèle à la droite (AB), leurs coefficients directeurs sont donc égaux. Ainsi $d : y = -3x + p$.

Or $C(2\ ;\ -2) \in d$ donc $y_C = -3x_C + p \iff -2 = -3 \times 2 + p \iff -2 = -6 + p \iff p = -2 + 6 \iff p = 4$.

Ainsi $\boxed{d : y = -3x + 4}$.

2) $\boxed{d \text{ passe par le point } A(-2\ ;\ 3) \text{ et est parallèle à la droite } d' \text{ d'équation } -2x - 5y + 4 = 0}$.

La droite d' a pour équation cartésienne $-2x - 5y + 4 = 0$ donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'.

Comme d est parallèle à d, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de d.

Ainsi $d : -2x - 5y + c = 0$.

Or $A(-2\ ;\ 3) \in d$ donc $-2x_A - 5y_A + c = 0 \iff -2 \times (-2) - 5 \times 3 + c = 0 \iff 4 - 15 + c = 0 \iff -11 + c = 0 \iff c = 11$.

Ainsi $\boxed{d : -2x - 5y + 11 = 0}$.