Correction : équations du second degré

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1 (Equations du second degré)

a) $\boxed{3x^2-4x+1=0}$: $a=3$; $b=-4$; $c=1$.

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times1=16-12=4$. $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$.

L'équation $3x^2-4x+1=0$ admet deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4-2}{2\times3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4+2}{2\times3}=\dfrac{6}{6}=1$.

L'ensemble des solutions de l'équation $3x^2-4x+1=0$ est : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right\}}$.

b) $\boxed{2x^2-4x+2=0}$: $a=2$; $b=-4$; $c=2$.

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times2=16-16=0$.

L'équation $2x^2-4x+2=0$ admet une unique solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-4}{2\times2}=\dfrac{4}{4}=1$. Donc $\boxed{\mathscr{S}=\{1\}}$.

c) $\boxed{-x^2+2x-3=0}$: $a=-1$; $b=2$; $c=-3$.

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-1)\times(-3)=4-12=-8$.

$\Delta<0$ et l'équation $-x^2+2x-3=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\varnothing}$.

d) $\boxed{-5x^2+5x+10=0}$: $a=-5$; $b=5$; $c=10$.

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times(-5)\times10=25+200=225$. $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{225}=15$.

L'équation $-5x^2+5x+10=0$ admet deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-15}{2\times(-5)}=\dfrac{-20}{-10}=2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+15}{2\times(-5)}=\dfrac{10}{-10}=-1$. Donc $\boxed{\mathscr{S}=\{2\ ;\ -1\}}$.

e) $\boxed{4x^2-10x+20=0}$: $a=4$; $b=-10$; $c=20$.

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times4\times20=100-320=-220$.

$\Delta<0$ et l'équation $4x^2-10x+20=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\varnothing}$.

f) $\boxed{4x^2+4x-6=0}$: $a=4$; $b=4$; $c=-6$.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times4\times(-6)=16+96=112$. $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{112}=\sqrt{16\times7}=\sqrt{16}\times\sqrt{7}=4\sqrt{7}$.

L'équation $4x^2+4x-6=0$ admet deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-4\sqrt{7}}{2\times4}=\dfrac{-\cancel{4}}{2\times\cancel{4}}-\dfrac{\cancel{4}\sqrt{7}}{2\times\cancel{4}}=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}=-\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$

et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+4\sqrt{7}}{2\times4}=\dfrac{-\cancel{4}}{2\times\cancel{4}}+\dfrac{\cancel{4}\sqrt{7}}{2\times\cancel{4}}=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$.

Donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\ ;\ \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}\right\}}$.

g) $\boxed{-10x^2-7x+3=0}$: $a=-10$; $b=-7$; $c=3$.

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times(-10)\times3=49+120=169$. $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{169}=13$.

L'équation $-10x^2-7x+3=0$ admet deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7-13}{2\times(-10)}=\dfrac{-6}{-20}=\dfrac{3}{10}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7+13}{2\times(-10)}=\dfrac{20}{-20}=-1$. Donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{3}{10}\ ;\ -1\right\}}$.

h) $\boxed{6x^2-8x-3=0}$: $a=6$; $b=-8$; $c=-3$.

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times6\times(-3)=64+72=136$. $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{136}=\sqrt{4\times34}=\sqrt{4}\times\sqrt{34}=2\sqrt{34}$.

L'équation $6x^2-8x-3=0$ admet deux solutions distinctes :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{8-2\sqrt{34}}{2\times 6}=\dfrac{\cancel{2}\times 4}{\cancel{2}\times 6}-\dfrac{\cancel{2}\sqrt{34}}{\cancel{2}\times 6}=\dfrac{4}{6}-\dfrac{\sqrt{34}}{6}=\dfrac{4-\sqrt{34}}{6}$
et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{8+2\sqrt{34}}{2\times 6}=\dfrac{\cancel{2}\times 4}{\cancel{2}\times 6}+\dfrac{\cancel{2}\sqrt{34}}{\cancel{2}\times 6}=\dfrac{4}{6}+\dfrac{\sqrt{34}}{6}=\dfrac{4+\sqrt{34}}{6}$.
Donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{4-\sqrt{34}}{6}\ ;\ \dfrac{4+\sqrt{34}}{6}\right\}}$.

✎ Exercice 2 (Trinômes du second degré)

a) $\boxed{f(x)=-3x^2-6x-4}$. $a=-3$; $b=-6$; $c=-4$.
$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times(-3)\times(-4)=36-48=-12$.
$\Delta<0$ donc $\boxed{\text{le trinôme } f(x) \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{R}}$.

b) $\boxed{g(x)=-x^2+4x+12}$. $a=-1$; $b=4$; $c=12$.
$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-1)\times 12=16+48=64$. $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$.
$\boxed{\text{Le trinôme } g(x) \text{ admet deux racines distinctes}}$:
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-8}{2\times(-1)}=\dfrac{-12}{-2}=\boxed{6}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+8}{2\times(-1)}=\dfrac{4}{-2}=\boxed{-2}$.

c) $\boxed{h(x)=5x^2-10x-20}$. $a=5$; $b=-10$; $c=-20$.
$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times5\times(-20)=100+400=500$. $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{500}=\sqrt{100\times5}=\sqrt{100}\times\sqrt{5}=10\sqrt{5}$.
$\boxed{\text{Le trinôme } h(x) \text{ admet deux racines distinctes}}$:
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{10-10\sqrt{5}}{2\times5}=\dfrac{10-10\sqrt{5}}{10}=\dfrac{10}{10}-\dfrac{10\sqrt{5}}{10}=\boxed{1-\sqrt{5}}$
et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{10+10\sqrt{5}}{2\times5}=\dfrac{10+10\sqrt{5}}{10}=\dfrac{10}{10}+\dfrac{10\sqrt{5}}{10}=\boxed{1+\sqrt{5}}$.

d) $\boxed{i(x)=2x^2-10x+5}$. $a=2$; $b=-10$; $c=5$.
$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times2\times5=100-40=60$. $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{60}=\sqrt{4\times15}=\sqrt{4}\times\sqrt{15}=2\sqrt{15}$.
$\boxed{\text{Le trinôme } i(x) \text{ admet deux racines distinctes}}$:
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{10-2\sqrt{15}}{2\times2}=\dfrac{\cancel{2}\times5}{\cancel{2}\times2}-\dfrac{\cancel{2}\sqrt{15}}{\cancel{2}\times2}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\boxed{\dfrac{5-\sqrt{15}}{2}}$
et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{10+2\sqrt{15}}{2\times2}=\dfrac{\cancel{2}\times5}{\cancel{2}\times2}+\dfrac{\cancel{2}\sqrt{15}}{\cancel{2}\times2}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\boxed{\dfrac{5+\sqrt{15}}{2}}$.

e) $\boxed{j(x)=5x^2-x+\dfrac{1}{20}}$. $a=5$; $b=-1$; $c=\dfrac{1}{20}$.
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times5\times\dfrac{1}{20}=1-20\times\dfrac{1}{20}=1-\dfrac{20}{20}=1-1=0$.
$\Delta=0$ donc $\boxed{\text{le trinôme } j(x) \text{ admet une unique racine}}$: $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-1}{2\times5}=\boxed{\dfrac{1}{10}}$.