Correction : montrer qu'une suite est ou n'est pas géométrique

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1 (Montrer qu'une suite n'est pas géométrique)

Pour montrer que la suite (u_n) n'est pas géométrique, on calcule les 3 premiers termes.

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 6n - 2n^2 + 1$.

$u_0 = 6\times 0 - 2\times 0^2 + 1 = \boxed{1}$; $u_1 = 6\times 1 - 2\times 1^2 + 1 = 6 - 2 + 1 = \boxed{5}$; $u_2 = 6\times 2 - 2\times 2^2 + 1 = 12 - 2\times 4 + 1$

$u_2 = 12 - 8 + 1 = \boxed{5}$.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{1} = 5$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{5} = 1$. $5 \neq 1$ donc $\boxed{\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1 + 3\sqrt{n}$.

$u_0 = 1 + 3\sqrt{0} = 1 + 3\times 0 = 1 + 0 = \boxed{1}$; $u_1 = 1 + 3\sqrt{1} = 1 + 3\times 1 = 1 + 3 = \boxed{4}$; $u_2 = \boxed{1 + 3\sqrt{2}}$.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{4}{1} = 4$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1+3\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}3$.

$4 \neq 1{,}3$ donc $\boxed{\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 4 - \dfrac{2}{n}$.

$u_1 = 4 - \dfrac{2}{1} = 4 - 2 = \boxed{2}$; $u_2 = 4 - \dfrac{2}{2} = 4 - 1 = \boxed{3}$; $u_3 = 4 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{12}{3} - \dfrac{2}{3} = \boxed{\dfrac{10}{3}}$.

$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{\frac{10}{3}}{3} = \dfrac{10}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{9}$.

$\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{10}{9}$ donc $\boxed{\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

d) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$

$u_0 = \boxed{2}$; $u_1 = u_0^2 + 3 = 2^2 + 3 = 4 + 3 = \boxed{7}$; $u_2 = u_1^2 + 3 = 7^2 + 3 = 49 + 3 = \boxed{52}$.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{52}{7} \approx 7{,}4$.

$\dfrac{7}{2} \neq \dfrac{52}{7}$ donc $\boxed{\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

✎ Exercice 2 (Montrer qu'une suite est géométrique)

Pour montrer que la suite (u_n) est géométrique, on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout entier n et on constate que le résultat obtenu est constant (cette constante est la raison de la suite).

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = -4 \times 5^n$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-4\times 5^{n+1}}{-4\times 5^n} = \dfrac{-4\times 5^n \times 5}{-4\times 5^n} = 5$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } 5}$.

Premier terme : $u_0 = -4 \times 5^0 = -4 \times 1 = \boxed{-4}$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^{n+1} \times 3$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+2}\times 3}{2^{n+1}\times 3} = \dfrac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = \dfrac{2^{n+1}\times 2}{2^{n+1}} = 2$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } 2}$.

Premier terme : $u_0 = 2^{0+1} \times 3 = 2^1 \times 3 = 2 \times 3 = \boxed{6}$.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{4}{3^n}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{4}{3^{n+1}}}{\dfrac{4}{3^n}} = \dfrac{4}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{4} = \dfrac{4}{3^n \times 3} \times \dfrac{3^n}{4} = \dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } \dfrac{1}{3}}$.

<u>Premier terme</u> : $u_0 = \dfrac{4}{3^0} = \dfrac{4}{1} = \boxed{4}$.

d) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{5} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$

Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après la relation de récurrence, on a $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{5} = \dfrac{2}{5}u_n$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{5}$

donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } \dfrac{2}{5}}$.

<u>Premier terme</u> : $\boxed{u_0 = -1}$.

✎ Exercice 3 (Avec une suite auxiliaire - type bac ES)

a) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = 1{,}5u_n + 9 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$

On introduit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par : $v_n = u_n + 18$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. $v_{n+1} = u_{n+1} + 18 = 1{,}5u_n + 9 + 18 = 1{,}5u_n + 27 = 1{,}5\left(u_n + \dfrac{27}{1{,}5}\right) = 1{,}5(u_n + 18) = 1{,}5v_n$

donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } 1{,}5}$.

<u>Premier terme</u> : $v_0 = u_0 + 18 = -4 + 18 = \boxed{14}$.

b) On considère la suite (w_n) définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}w_n - 2 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$

On introduit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par : $v_n = w_n + 3$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. $v_{n+1} = w_{n+1} + 3 = \dfrac{1}{3}w_n - 2 + 3 = \dfrac{1}{3}w_n + 1 = \dfrac{1}{3}(w_n + 3) = \dfrac{1}{3}v_n$

donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } \dfrac{1}{3}}$.

<u>Premier terme</u> : $v_0 = w_0 + 3 = 2 + 3 = \boxed{5}$.

✎ Exercice 4 (Avec une suite auxiliaire - type bac S)

1) a) * $u_1 = \dfrac{2}{1+u_0} = \dfrac{2}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

* $u_2 = \dfrac{2}{1+u_1} = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{\dfrac{3}{2}} = 2 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

b) * (u_n) arithmétique ?

$u_1 - u_0 = \dfrac{1}{2} - 3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{2} = -\dfrac{5}{2}$; $u_2 - u_1 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{6} - \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{6}$.

$-\dfrac{5}{2} \neq \dfrac{5}{6}$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc <u>la suite (u_n) n'est pas arithmétique</u>.

* (u_n) géométrique ?

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$; $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\dfrac{4}{3}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{1} = \dfrac{8}{3}$.

$\frac{1}{6} \neq \frac{8}{3}$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2) $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n.

a) $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$.

b) Soit $n \in \mathbf{N}$. $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - \frac{1+u_n}{1+u_n}}{\frac{2}{1+u_n} + \frac{2(1+u_n)}{1+u_n}} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - \frac{1+u_n}{1+u_n}}{\frac{2}{1+u_n} + \frac{2+2u_n}{1+u_n}} = \frac{\frac{2-(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{2+2+2u_n}{1+u_n}} = \frac{\frac{2-1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}}$

$v_{n+1} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{1+u_n} \times \frac{1+u_n}{4+2u_n} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{-(u_n - 1)}{2(u_n+2)} = -\frac{1}{2}\frac{u_n - 1}{u_n + 2} = -\frac{1}{2}v_n$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } q = -\frac{1}{2}}$.

c) Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après précédemment, on a $\boxed{v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

Comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et, par multiplication par $\frac{2}{5}$, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$.

d) On a $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \iff v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \iff v_n \times u_n + 2v_n = u_n - 1 \iff 2v_n + 1 = u_n - v_n \times u_n$

$\iff 2v_n + 1 = u_n(1 - v_n) \iff \boxed{u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (2v_n + 1) = 2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - v_n) = 1 - 0 = 1$.

Par quotient, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.