Correction : montrer qu'une suite est ou n'est pas arithmétique

www.bossetesmaths.com

Exercice 1 (Montrer qu'une suite n'est pas arithmétique)

Pour montrer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique, on calcule les 3 premiers termes.

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = -4n + 6n^2$.

$u_0 = -4 \times 0 + 6 \times 0^2 = \boxed{0}$; $u_1 = -4 \times 1 + 6 \times 1^2 = -4 + 6 = \boxed{2}$; $u_2 = -4 \times 2 + 6 \times 2^2 = -8 + 6 \times 4 = -8 + 24 = \boxed{16}$.

$u_1 - u_0 = 2 - 0 = 2$ et $u_2 - u_1 = 16 - 2 = 14$. $2 \neq 14$ donc $\boxed{u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1}$

donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2\sqrt{n} + 1$.

$u_0 = 2\sqrt{0} + 1 = 2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = \boxed{1}$; $u_1 = 2\sqrt{1} + 1 = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = \boxed{3}$; $u_2 = \boxed{2\sqrt{2} + 1}$.

$u_1 - u_0 = 3 - 1 = 2$ et $u_2 - u_1 = 2\sqrt{2} + 1 - 3 = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0,8$.

$2 \neq 0,8$ donc $\boxed{u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$.

$u_1 = \dfrac{1}{1} - 2 = 1 - 2 = \boxed{-1}$; $u_2 = \dfrac{1}{2} - 2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{2} = \boxed{-\dfrac{3}{2}}$; $u_3 = \dfrac{1}{3} - 2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{6}{3} = \boxed{-\dfrac{5}{3}}$.

$u_2 - u_1 = -\dfrac{3}{2} - (-1) = -\dfrac{3}{2} + 1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $u_3 - u_2 = -\dfrac{5}{3} - \left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{10}{6} + \dfrac{9}{6} = -\dfrac{1}{6}$.

$-\dfrac{1}{2} \neq -\dfrac{1}{6}$ donc $\boxed{u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

d) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{u_n} + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$

$u_0 = \boxed{-2}$; $u_1 = \dfrac{4}{u_0} + 1 = \dfrac{4}{-2} + 1 = -2 + 1 = \boxed{-1}$; $u_2 = \dfrac{4}{u_1} + 1 = \dfrac{4}{-1} + 1 = -4 + 1 = \boxed{-3}$.

$u_1 - u_0 = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$ et $u_2 - u_1 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$.

$1 \neq -2$ donc $\boxed{u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

Exercice 2 (Montrer qu'une suite est arithmétique)

Pour montrer que la suite (u_n) est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier n et on constate que le résultat obtenu est constant (cette constante est la raison de la suite).

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = -4n + 5$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_{n+1} - u_n = -4(n+1) + 5 - (-4n + 5) = -4n - 4 + 5 + 4n - 5 = -4$

donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est arithmétique de raison } -4}$.

Premier terme : $u_0 = -4 \times 0 + 5 = 0 + 5 = \boxed{5}$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 5 - 30n$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_{n+1} - u_n = 5 - 30(n+1) - (5 - 30n) = 5 - 30n - 30 - 5 + 30n = -30$

donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est arithmétique de raison } -30}$.

Premier terme : $u_0 = 5 - 30 \times 0 = 5 - 0 = \boxed{5}$.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{2n - 7}{3}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1) - 7}{3} - \dfrac{2n - 7}{3} = \dfrac{2n + 2 - 7}{3} - \dfrac{2n - 7}{3} = \dfrac{2n + 2 - 7 - (2n - 7)}{3} = \dfrac{2n + 2 - 7 - 2n + 7}{3}$

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{2}{3}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est arithmétique de raison } \dfrac{2}{3}}$.

Premier terme : $u_0=\dfrac{2\times 0-7}{3}=\dfrac{0-7}{3}=\boxed{-\dfrac{7}{3}}$.

d) $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=6+u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbf{N}. \end{cases}$

Soit $n\in\mathbf{N}$. D'après la relation de récurrence, comme $u_{n+1}=6+u_n$ alors $u_{n+1}-u_n=6$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est arithmétique de raison } 6}$.

Premier terme : $\boxed{u_0=3}$.

✎ Exercice 3 (Avec une suite auxiliaire)

a) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=4-\dfrac{4}{u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbf{N}. \end{cases}$

On introduit la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbf{N}$ par : $v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$.

Soit $n\in\mathbf{N}$. $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{4-\dfrac{4}{u_n}-2}=\dfrac{1}{2-\dfrac{4}{u_n}}=\dfrac{1}{\dfrac{2u_n}{u_n}-\dfrac{4}{u_n}}=\dfrac{1}{\dfrac{2u_n-4}{u_n}}=1\times\dfrac{u_n}{2u_n-4}=\dfrac{u_n}{2u_n-4}$

ainsi, en factorisant par 2 au dénominateur, on obtient : $v_{n+1}=\dfrac{u_n}{2(u_n-2)}$.

Alors $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n}{2(u_n-2)}-\dfrac{1}{u_n-2}=\dfrac{u_n}{2(u_n-2)}-\dfrac{2}{2(u_n-2)}=\dfrac{u_n-2}{2(u_n-2)}=\dfrac{1(u_n-2)}{2(u_n-2)}=\dfrac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est arithmétique de raison } \dfrac{1}{2}}$.

Premier terme : $v_0=\dfrac{1}{u_0-2}=\dfrac{1}{3-2}=\dfrac{1}{1}=\boxed{1}$.

b) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n-1}{4u_n+1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbf{N}. \end{cases}$

On introduit la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbf{N}$ par : $v_n=\dfrac{2}{2u_n-1}$.

Soit $n\in\mathbf{N}$. $v_{n+1}=\dfrac{2}{2u_{n+1}-1}=\dfrac{2}{2\times\dfrac{5u_n-1}{4u_n+1}-1}=\dfrac{2}{\dfrac{10u_n-2}{4u_n+1}-\dfrac{4u_n+1}{4u_n+1}}=\dfrac{2}{\dfrac{10u_n-2-(4u_n+1)}{4u_n+1}}$

$v_{n+1}=\dfrac{2}{\dfrac{10u_n-2-4u_n-1}{4u_n+1}}=\dfrac{2}{\dfrac{6u_n-3}{4u_n+1}}=2\times\dfrac{4u_n+1}{6u_n-3}=\dfrac{8u_n+2}{6u_n-3}=\dfrac{8u_n+2}{3(2u_n-1)}$ (en factorisant par 3 au dénominateur).

Alors $v_{n+1}-v_n=\dfrac{8u_n+2}{3(2u_n-1)}-\dfrac{2}{2u_n-1}=\dfrac{8u_n+2}{3(2u_n-1)}-\dfrac{3\times 2}{3(2u_n-1)}=\dfrac{8u_n+2}{3(2u_n-1)}-\dfrac{6}{3(2u_n-1)}=\dfrac{8u_n+2-6}{3(2u_n-1)}$

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{8u_n-4}{3(2u_n-1)}=\dfrac{4(2u_n-1)}{3(2u_n-1)}=\dfrac{4}{3}$ (en factorisant par 4 au numérateur puis en simplifiant par $2u_n-1$).

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est arithmétique de raison } \dfrac{4}{3}}$.

Premier terme : $v_0=\dfrac{2}{2u_0-1}=\dfrac{2}{2\times 1-1}=\dfrac{2}{2-1}=\dfrac{2}{1}=\boxed{2}$.