Correction : image et antécédent(s) d'un nombre par une fonction

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1 (Calculer des images)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x^2 - 4$.
$f(-2) = 3 \times (-2)^2 - 4 = 3 \times 4 - 4 = 12 - 4 = 8$. $\boxed{\text{L'image de } -2 \text{ par } f \text{ est } 8}$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g : x \mapsto 2 - \dfrac{3}{x}$.

a) $g(6) = 2 - \dfrac{3}{6} = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2} - \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$.

b) $g(-3) = 2 - \dfrac{3}{-3} = 2 + \dfrac{3}{3} = 2 + 1 = 3$. $\boxed{\text{L'image de } -3 \text{ par } g \text{ est } 3}$.

c) $g\left(\dfrac{9}{4}\right) = 2 - \dfrac{3}{\frac{9}{4}} = 2 - 3 \times \dfrac{4}{9} = 2 - \dfrac{3 \times 4}{3 \times 3} = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$. $\boxed{\text{L'image de } \frac{9}{4} \text{ par } g \text{ est } \frac{2}{3}}$.

3) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $h(x) = \dfrac{3x^2}{2-x}$.
$h(-4) = \dfrac{3 \times (-4)^2}{2-(-4)} = \dfrac{3 \times 16}{2+4} = \dfrac{3 \times 16}{6} = \dfrac{3 \times 2 \times 8}{3 \times 2} = 8$. $\boxed{\text{L'image de } -4 \text{ par } h \text{ est } 8}$.

✎ Exercice 2 (Calculer des antédécents)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 5x$.
On résout l'équation : $f(x) = 8 \iff 3 - 5x = 8 \iff -5x = 8 - 3 \iff -5x = 5 \iff x = \dfrac{5}{-5} \iff x = -1$.
$\boxed{\text{L'antécédent de 8 par } f \text{ est } 1}$.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto 3x^2 + 1$.

a) On résout l'équation : $g(x) = 19 \iff 3x^2 + 1 = 19 \iff 3x^2 = 19 - 1 \iff 3x^2 = 18 \iff x^2 = \dfrac{18}{3}$
$\iff x^2 = 6 \iff x = -\sqrt{6}$ ou $x = \sqrt{6}$. $\boxed{\text{Les antécédents de 19 par } g \text{ sont } -\sqrt{6} \text{ et } \sqrt{6}}$.

b) On résout l'équation : $g(x) = -\dfrac{5}{7} \iff 3x^2 + 1 = -\dfrac{5}{7} \iff 3x^2 = -\dfrac{5}{7} - 1 \iff 3x^2 = -\dfrac{5}{7} - \dfrac{7}{7}$
$\iff 3x^2 = -\dfrac{12}{7} \iff x^2 = -\dfrac{12}{7} \div 3 \iff x^2 = -\dfrac{12}{7} \div \dfrac{3}{1} \iff x^2 = -\dfrac{12}{7} \times \dfrac{1}{3} \iff x^2 = -\dfrac{12}{7 \times 3}$
$\iff x^2 = -\dfrac{4 \times 3}{7 \times 3} \iff x^2 = -\dfrac{4}{7}$. Impossible car un carré est toujours positif ou nul.
$\boxed{-\frac{5}{7} \text{ n'a pas d'antécédent par } g}$.

c) $g(x) = 1 \iff 3x^2 + 1 = 1 \iff 3x^2 = 1 - 1 \iff 3x^2 = 0 \iff x^2 = \dfrac{0}{3} \iff x^2 = 0 \iff x = 0$.
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } g(x) = 1 \text{ est } \mathscr{S} = \{0\}}$.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $h(x) = \dfrac{4}{x-3}$.
On résout l'équation : $h(x) = -2 \iff \dfrac{4}{x-3} = -2 \iff 4 = -2(x-3) \iff 4 = -2x + 6 \iff 2x = 6 - 4$
$\iff 2x = 2 \iff x = \dfrac{2}{2} \iff x = 1$. $\boxed{\text{L'antécédent de } -2 \text{ par } h \text{ est } 1}$.

4) Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k : x \mapsto \dfrac{20}{x^2+6}$.

On résout l'équation : $k(x) = 2 \iff \dfrac{20}{x^2+6} = 2 \iff 20 = 2(x^2+6) \iff 20 = 2x^2+12$

$\iff 20-12 = 2x^2 \iff 8 = 2x^2 \iff \dfrac{8}{2} = x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$.

$\boxed{\text{Les antécédents de 2 par } k \text{ sont } -2 \text{ et } 2}$.