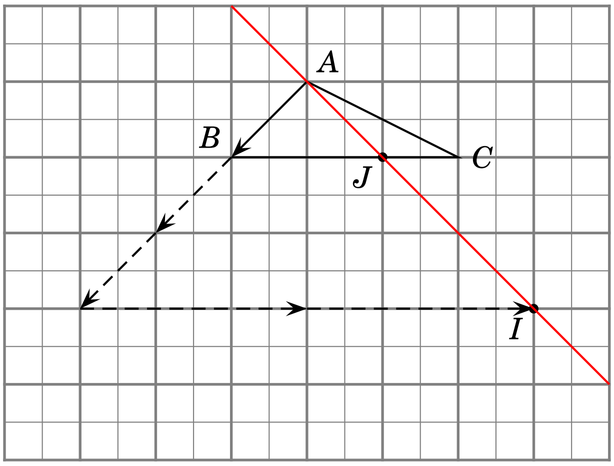
Correction : décomposer des vecteurs pour démontrer

www.bossetesmaths.com

✎ Exercice 1

a) ABC est un triangle. Les points I et J sont tels que : $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



Pour montrer que les points A, I et J sont alignés, montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires.

* On a déjà : $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$ d'après l'énoncé.

* De plus : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

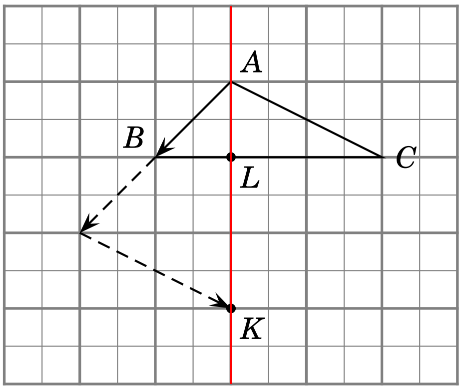
On remarque alors que : $3 \times \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI}$

soit $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AJ}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires.

Donc $\boxed{\text{les points } A, I \text{ et } J \text{ sont alignés}}$.

b) ABC est un triangle. Les points K et L sont tels que : $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC}$ soit $\overrightarrow{BL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



Pour montrer que les points A, K et L sont alignés, montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires.

* On a déjà : $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ d'après l'énoncé.

* Exprimons aussi $\overrightarrow{AL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

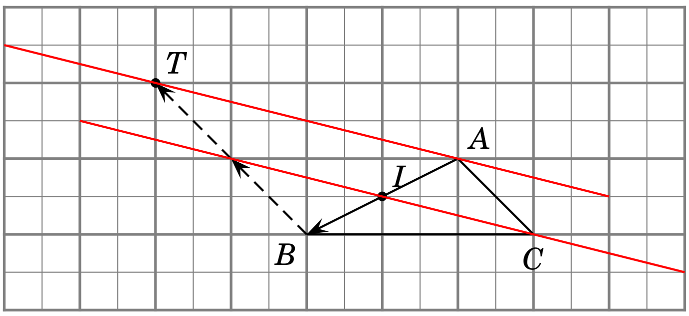
On remarque alors que : $3 \times \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AK}$ soit $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AL}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires.

Donc $\boxed{\text{les points } A, K \text{ et } L \text{ sont alignés}}$.

✎ Exercice 2

ABC est un triangle. Le point I est le milieu de $[AB]$.

Le point T est tel que : $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ soit $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$.



Pour montrer que les droites (AT) et (CI) sont parallèles, montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.

* On a déjà : $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$ d'après l'énoncé.

* Comme I est le milieu de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exprimons aussi le vecteur $\overrightarrow{CI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$.

* $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$.

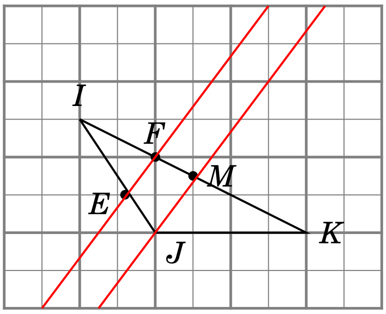
On remarque alors que : $2 \times \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AT}$ soit $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{CI}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.

Donc $\boxed{\text{les droites } (AT) \text{ et } (CI) \text{ sont parallèles}}$.

✎ Exercice 3

IJK est un triangle. Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{IE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IK}$.

M est le milieu du segment $[IK]$.



Pour montrer que les droites (EF) et (JM) sont parallèles, montrons que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{JM}$ sont colinéaires.

* On a : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IK}$.

* Comme M est le milieu de $[IK]$, on a : $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IK}$.

Exprimons aussi le vecteur $\overrightarrow{JM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{IK}$.

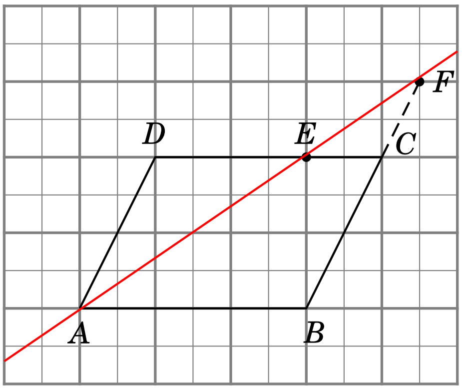
* $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{JI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IK}$.

On remarque alors que : $\frac{2}{3} \times \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{EF}$ soit $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JM}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{JM}$ sont colinéaires.

Donc $\boxed{\text{les droites } (EF) \text{ et } (JM) \text{ sont parallèles}}$.

✎ Exercice 4

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.



Pour montrer que les points A, E et F sont alignés, montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

* Tout d'abord, comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a :
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

* On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Exprimons aussi $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

* $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

On remarque alors que : $\frac{2}{3} \times \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$ soit $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

Donc $\boxed{\text{les points } A, E \text{ et } F \text{ sont alignés}}$.